INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DOCENTE N° 106

MÓDULO ESPECÍFICO

PROFESORADO DE EDUCACION SECUNDARIA EN MATEMATICA

CUADERNILLO DEL CURSO INICIAL

Profesores a cargo del material

BARINDELLI, PATRICIA

BENJAMIN, RUBEN

BOTTARO, DANIELA

BOTTARO, J. PABLO

DE TOMA, SUSANA

GUARNIERI, ELSA

PILECI, FEDERICO

ROMANO, LILIANA

SALERNO, ROMINA

SPAGNOLO, NOELIA

VENUTOLO, ELSA

VOZZA, BETIANA

UNIDADES CONCEPTUALES

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

DESDE EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES HASTA LOS NÚMEROS REALES

2. INTRODUCCIÓN A FUNCIÓN

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN. LETURA DE GRAFICO E INTERPRETACIÓN DE LAS VARIABLES.

3. FUNCIÓN LINEAL

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LINEAL. INTERP DE LA PENDIENTE Y ORDENADA. EL GRAFICO: LA RECTA. ECUACION DE LA RECTA A TRAVES DE DATOS.

4. FUNCION CUADRÁTICA

DEFINICION DE FUNCION CUADRATICA. INTERPRETACION DE LOS COEFICIENTES. EL GRAFICO: LA PRABOLA. CARACT. PRINCIPALES

5. POLINOMIOS

INTROD. A LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS. DEF. DE POLINOMIO. OPERACIONES ELEMENTALES

6. GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA

POLIGONOS. CARACT. PRINCIPALES. PERIMETRO Y AREA.

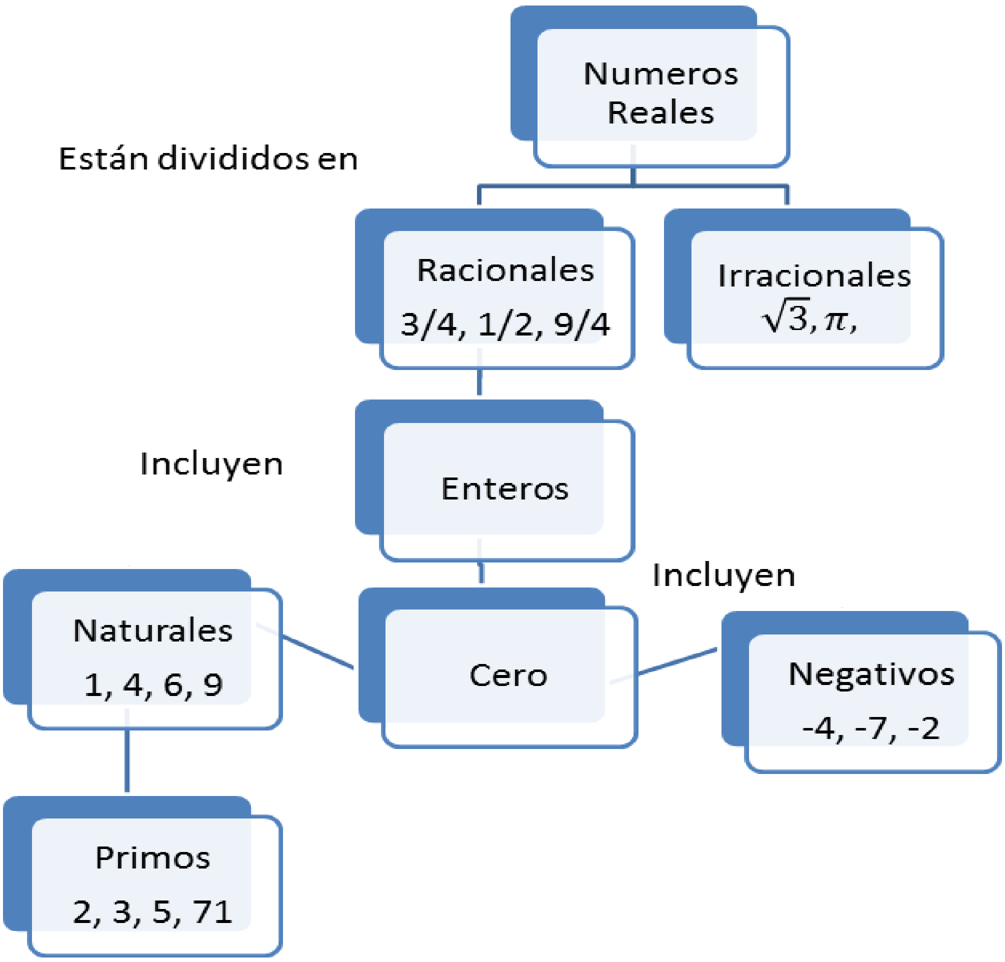
CONJUNTOS NUMERICOS

DESDE EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES HASTA LOS NUMEROS REALES

El número

En este comienzo realizaremos un recorrido por los diversos números que desde la escuela o la vida real nos son conocidos

Para tener un panorama de nuestro recorrido aquí va un esquema orientador a modo de guía



Nuestro punto de partida los números naturales

El hombre desde principios de la evolución siempre utilizó recursos para facilitar su relación con el medio, en un comienzo, con el entorno que lo rodea muy natural y agresivo, con el fin de entenderlo, controlarlo , prevenir y asegurar de mejor manera su existencia.

La noción de cantidad, número y sistema numérico

Desde la era primitiva el hombre siempre buscó respuestas a sus necesidades e inquietudes.

La inquietud permitió la aparición de conceptos abstractos en la mente del hombre primitivo ya evolucionado. Cuando el hombre desarrolla la capacidad de darle sentido racional a las cosas, nace el concepto de cantidad.

Inicialmente no utilizábamos la notación indo – arábiga, sino representábamos, las cantidades, con marcas en los árboles, con un montón de piedras, nudos en sogas, etc. Los recursos que utilizábamos dependían de la cultura donde estábamos ubicados. Si realizamos una introspección de nuestras historias como humanos nos daremos cuenta que alguna vez es el método de conteo que hemos utilizado.

Diversas culturas representan la noción de cantidad según su desarrollo lo permitía. Fruto de esta diversidad nacen las notaciones de cantidad como la romana, babilónica, griega, etc. Se sabe que nuestros ancestros utilizaron simples enteros positivos para tratar de contar unas pocas ovejas, mientras que hoy en día los enteros positivos no satisfacen el complejo mundo de las actividades humanas y de las matemáticas. Desde luego el significado que cada grupo social asigna a un determinado conocimiento o idea, implica mucho en su visión de vida. Por ejemplo, los pitagóricos tenían una explicación de la realidad basada en los números. Filolao, filósofo, discípulo de Pitágoras, resume perfectamente el papel tan importante que se le otorgaba: “El número reside en todo lo que es conocido. Sin él es imposible pensar nada ni conocer nada.” La facultad de contar está implícita en la aparición del número. Se mencionó que el hombre hacía marcas, aunque a veces los seguimos haciendo, para representar ciertas cantidades, pues esta actividad, que perdura desde tiempos inmemoriales, se formalizó en cada cultura con el número.

El hombre advirtió que todos los conjuntos de objetos o de seres tienen una cualidad en común, con independencia de la naturaleza de los objetos o de los seres que lo componen. La cualidad se denomina número. Un ejemplo práctico reside en que el hombre al realizar tantas marcas, juntar tantas piedras, hacer tantos nudos deduce racionalmente, según la contabilidad de cada objeto, que dichas contabilidades conllevan a “representaciones”, que no depende de qué estuviese contando, sino más bien del número de marcas, de piedras, de nudos, etc. Entonces se estableció un símbolo para cada contabilidad respectiva. La contabilidad de una oveja se simbolizaría con I, 1, etc., según cada cultura establezca como universal. El nacimiento de los sistemas numéricos tiene como precedente esta sistematización de universalidad.

Nos detenemos aquí para tratar de responder estos conceptos:

¿Qué es contar? …………………….

¿Qué es un número? ………………………………

El número natural Desde que nos levantamos a diario para realizar nuestras labores, utilizamos el número natural. Si usted no se ha percatado de esto, pues simplemente fíjese en el número de libros que tiene en su biblioteca, en el número de camisas, o mejor si usted es estudiante, en el número de alumnos de su clase. Para contabilizar los objetos, utilizamos en general, los números naturales, por decir 3 pelotas, 100 estrellas, etc.

También los números naturales nos sirven para ordenar o numerar; por ejemplo decimos Universitario está tercero en la tabla de posiciones o también Sacachispas está en primer lugar en el torneo local. Entonces, concluimos que los números naturales tiene dos primeras características: la cardinalidad y la ordinalidad. La representación simbólica de los números naturales se presupone que surgió antes del nacimiento de las palabras para "representarlos", seguramente porque es más fácil contar muescas en un palo que establecer una frase para identificar un número concreto. Los símbolos que representan a los números no han sido siempre los mismos. Citamos a continuación la simbolización de diversas culturas respecto a los números naturales, según su contexto.

Finalmente se estableció el conjunto de los números naturales, con la notación adoptada por la letra N, y es el siguiente: N = { 1,2,3,4 ,...,100,101,....} algunas teorías matemáticas en particular la del Matemático Peano basa su teoría con el cero comprendido entre los naturales, lo que indicaremos como:

N_0 = { 0,1,2,3,4 ,...,100,101,....} se dice que esta es un abuso de notación pues los matemáticos han acordado utilizar los conjuntos por extensión para cantidades finitas por ejemplos A={ 3, 5 9 ,12}

B={ @, •, ∆ , ⅖} Los conjuntos A y B tienen algo en común ¿Qué es?………………………………………………….

En cambio para los conjuntos infinitos se utiliza una o más propiedades que vinculen a sus elementos, aquí va unos ejemplos W= { x∊ N/ x≥ 15 } S= { x∊ N/ x≥ 15 v x=4 } el símbolo v para agregar, juntar en este caso está indicando los valores de W con el agregado del 4

El símbolo x representa a cualquiera de los elementos del conjunto y lo que está a continuación del símbolo / (tal que) la propiedad que deben cumplir sus elementos, aquí va otro ejemplo:

H= { x∊ N/ x= 2.n ^ n ∊ N } el conectivo ^ se usa para indicar que ambas condiciones se deben cumplir, en el ejemplo hemos expresado a los números naturales pares .

Para resolver:

a) expresa en notación de conjuntos los múltiplos de 3

b) Expresa de dos formas distintas los múltiplos de 6

c) que elementos tienen los siguientes conjuntos

A={ x∊ N/ x= 3.h ^ h ∊ N ^ 5 < h ≤ 11}

B={ x∊ N/ 5 ≤ x < 14 v x= 21 v x ≤ 3}

C= { x∊ N/ x≥ 15 ^ x < 26 }

Se puede el cero en los números naturales tomando como referencia al aporte de Giuseppe Peano (1858 – 1932); que fue un matemático y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la Teoría de conjuntos; pero en este caso, por un acuerdo de los matemáticos se debe indicar simbólicamente como: N_0

Se sabe desde luego que los pitagóricos clasificaron los números (naturales) en pares e impares y, probablemente, la designación de números perfectos, que se encuentra en Euclides (Egipto Ptolemaico, alrededor de 365 d.C.-275 a.C.)7, para aquellos números como el 6, 28, 496, 8128 que tienen la propiedad de ser iguales a la suma de sus divisores menores que él; luego los números amigos para aquellos como 220 y 284, cada uno de los cuales es la suma de los divisores del otro. Otro ejemplo similar 1210 y 1284

Actividades

Verifica que: a)Los divisores de 28 suman 28 , repite para el 496.

b) Verifica que 220 y 284 son números amigos.

c) Busca en la red de información otros pares de números amigos

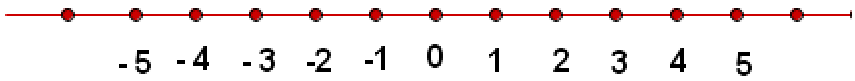
Los números naturales se pueden sumar y multiplicar, pero no todos se pueden restar o dividir. Es por esto que se hace una extensión al conjunto de los naturales, la necesidad de completitud de las operaciones de resta genera el conjunto de los números negativos. A su vez la de dividir; los números racionales.

Las primeras manifestaciones de su uso se remontan al siglo V, en oriente, y no llega hasta occidente hasta el siglo XVI. En oriente se manipulaban números positivos y negativos, estrictamente se utilizaba los ábacos, usando tablillas o bolas de diferentes colores.

Corresponde a los Indios la diferenciación entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente.8. Además el cero también es atribuida a esta cultura, hacia el año 650 d. C. Tener en cuenta que los griegos utilizaban magnitudes negativas en sus teoremas del álgebra geométrica, pero este siempre referido a las propiedades de la operación de restar, tales como, por ejemplo, $(a - b).(c - d) = ac + bd - ad - bc$; dejándolos como restas indicadas. Sin embargo, fueron los indios los encargados en mostrar reglas numéricas para ello, esto en positivos y negativos. Es así que Brahmagupta, matemático indio, contribuye al álgebra con presentación de soluciones negativas para ecuaciones cuadráticas. La primera vez que aparece sistematizada de los números negativos y del cero es en la obra de Brahmagupta.

Los números han acompañado a la humanidad desde los tiempos más primitivos y siguen hoy al servicio de nuestro progreso. A lo largo de cinco milenios, distintas clases de números han ido surgiendo para resolver problemas cada vez más creativos. Naturales, enteros, racionales, reales o complejos, nuestra vida es hoy en día inconcebible sin los números. El desarrollo numérico ha permitido contar, ordenar, situar, comparar, repartir, calcular, codificar... y disponer de un lenguaje que hoy es esencial tanto para la vida cotidiana como para el desarrollo de la ciencia y de la técnica.

Los números negativos, además complementan o extienden el conjunto de los números naturales, generado por un defecto de los números naturales: la generalidad para la operación de resta y división. Por ejemplo 5 – 9 resulta – 4, que no es natural, no se cumple entonces la propiedad de clausura o cerradura en los naturales. El hombre, visto en la imposibilidad de realizar, en general, la operación de resta crea otro conjunto, que viene hacer el conjunto de los números negativos. Los números naturales junto con los negativos formarán luego el conjunto de los números enteros; es decir los números naturales complementados con los naturales. Observemos el siguiente gráfico:



Donde:

• Los enteros positivos (positivos en el gráfico), se denota con + Z .

• Los enteros negativos (negativos en el gráfico), se denota con − Z .

• El cero no tiene signo, es neutro. La distancia del cero a un número entero positivo +a, será la misma que la de un negativo –a; ambos entonces de igual magnitud. Así esto es denominado como valor absoluto. El cero es aquel número entero que no posee ningún signo respectivo, vale decir no es positivo ni negativo.

CONCLUSIONES

1. Los números nacen junto la evolución del hombre, se origina de la práctica en la naturaleza. 2. La necesidad en la matemática la impulsa para ir cambiando y evolucionando. 3. Cada cultura dio manifestaciones de la noción de cantidad y la idea de número en sus representaciones. 4. Los enteros no fueron aceptados de manera universal hasta el siglo XVIII, sin embargo ya era usado por algunas culturas. 5. El cero no se origina formalmente junto con los números naturales. 6. Es necesario aplicar la historia de las matemáticas, como recurso didáctico, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Números enteros en la vida cotidiana

ES UN CONJUNTO DE NÚMEROS QUE INCLUYE A LOS NÚMEROS NATURALES, SUS OPUESTOS Y EL NÚMERO CERO,

¿Cuáles son ejemplos en la realidad de números enteros?

Lectura de valores en un Termómetro

Niveles de posición (por ejemplo, respecto al nivel del mar)

Se utilizan números enteros positivos para los pisos hacia arriba de cero. Los números negativos serán los pisos que se encuentran debajo de cero.

Aquí otro ejemplo cuando se realizan lectura de actividades de lectura de cotizaciones de las acciones de inversión

MERCADO de VALORES

MEJORES %		PEORES %	
DIA	1.	INDITEX	-5,09
IBERDROLA	2.	INDRA	-2,82
TELEFONICA	3.	VISCOFAN	-2,70
REPSOL	4.	ACERINOX	-2,28
BBVA	5.	MERLIN PRO	-1,86

- **Números Racionales**

La forma fraccionaria de estos números proviene de la India, pero la raya que se utiliza para expresarlos fue introducida por la cultura árabe. Estas operaciones se vienen realizando desde la antigüedad y de hecho se cree que el origen remoto de este sistema está relacionado con el consumo de pan en el antiguo Egipto (este hecho se conoce gracias al papiro Ahmes, que data del año 1900 a. C). En la actualidad se reconoce al conjunto mediante el símbolo Q

En la vida cotidiana empleamos los números racionales con mucha frecuencia.

Así, cuando decimos " deme un cuarto de mantequilla" o "un tercio de tarta" estamos utilizando esta concepción numérica.

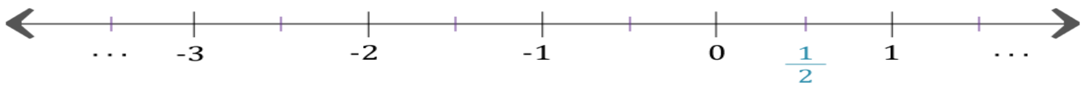
Una definición más formal para los matemáticos es: $Q = \left\{ x = \frac{p}{q} / \quad p \,\varepsilon\, Z \wedge q \,\varepsilon\, Z \wedge q \neq 0 \right\}$

Orden en la recta numérica

La recta numérica es una herramienta muy útil para comparar números, aprende como usarla. Recordarás el concepto de orden y el símbolo que usamos para representarlo. Cuando ubicamos correctamente los números en la recta, quedan organizados de izquierda a derecha, estando los menores a la izquierda y los mayores a la derecha.

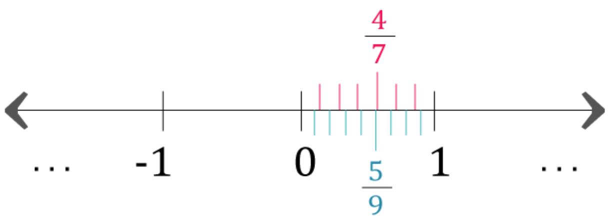
Vemos por ejemplo como *menos uno* está a la derecha de *menos tres*, representando gráficamente que

$-3 < -1$ $0 > -1$ que $0 < \frac{1}{6}$



En color rojo se muestran las divisiones necesarias para representar 4/7 es decir, se dividió la unidad en siete partes iguales y se tomaron cuatro. En color azul se dividió la unidad en nueve partes iguales, de las cuales se tomaron cinco.

Si observas con atención notarás que 4/7 está un poco más a la derecha que _________



$$\frac{5}{9} < \frac{4}{7}$$

Números irracionales: Aparentemente ***Hipaso*** (un estudiante de *Pitágoras*) descubrió los números irracionales intentando escribir la raíz de 2 en forma de fracción (se cree que usando geometría). Pero en su lugar demostró que no se puede escribir como fracción, así que es *irracional*.

Pero ***Pitágoras*** no podía aceptar que existieran números irracionales, porque creía que todos los números tienen valores perfectos, posteriormente a medida que surgía su necesidad ya sea científica o de aplicación real, fueron aumentando su presencia en la humanidad.

Un **Numero Irracional** es un número que no puede ser expresado en forma de razón (fracción); Es aquel cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Lo representamos con la letra

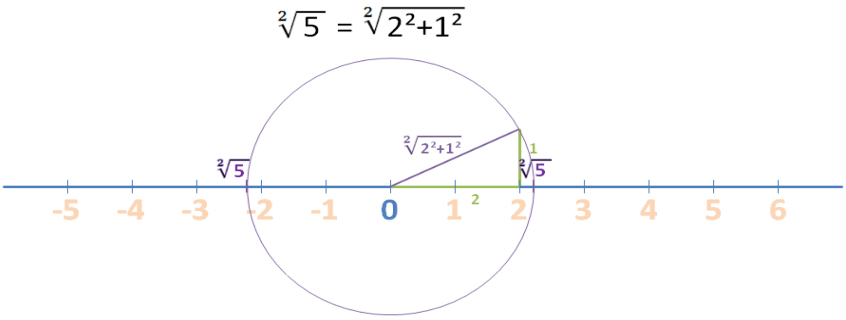
Para poder representar sobre la recta numérica los números irracionales de la forma $\sqrt{a}$, con a > 0 vamos a necesitar del Teorema de Pitágoras.

Su definición formal es **I**= {x∊ R/ x≠ p/q donde, p ^ q números enteros} en contra posición con los números racionales

Se puede demostrar que la raíz cuadrada de 2 no es racional

Las raíces cuadradas cuyo radicando no es un cuadrado perfecto son números irracionales, lo mismo si son raíces de otro índice $\sqrt{17}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[5]{0{,}2}$

A continuación, indicamos la representación en la recta del irracional $\sqrt{2}$ para lo que tendemos en cuenta el famoso teorema de Pitágoras



Otra de sus características, su parte decimal no es periódica o sea no se repiten en un orden determinado.

Actividad Usando tu calculadora si es necesario, expresa las cifras decimales de :

a) $\sqrt{12}$ = ... $\pi =$ .... $\frac{4}{7} =$........... $\frac{19}{11} =$

b) Sea la expresión que depende de n, expresada en la siguiente tabla: (trabajar en equipo)

n	$\frac{4(-1)^n}{2n+1}$	$\sum_{i=0}^{n} \frac{4(-1)^{n+1}}{2n+1}$
0	4	4
1	$-1{,}333$	2,66666
2	0,8	3,466666

….

¿qué ocurre con la sumatoria si la realizamos hasta un número por ejemplo 100?

Nota: Puedes utilizar algún programa o aplicación como el Excel para ayudarte

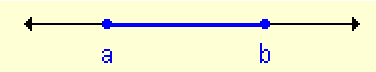
Intervalos

Un subconjunto de la recta real se llama intervalo, y contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos. Geométricamente los intervalos corresponden a segmentos de recta, semirrectas o la misma recta real. Los intervalos de números correspondientes a segmentos de recta son intervalos finitos, los intervalos correspondientes a semirrectas y a la recta real son intervalos infinitos.

Los intervalos finitos pueden ser cerrados, abiertos o semiabiertos. Sean a y b dos números reales tales que a < b.

Intervalo cerrado

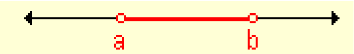
Es el conjunto de números reales formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos.



$[a, b] = \{ x \varepsilon R / a \leq x \leq b\}$

Intervalo abierto

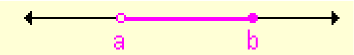
Es el conjunto de los números reales comprendidos entre a y b.



$(a, b) = \{ x \varepsilon R / a < x < b\}$

Intervalo semiabierto a izquierda (o semicerrado a derecha)

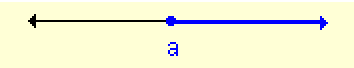
Es el conjunto de números reales formado por b y los números comprendidos entre a y b.



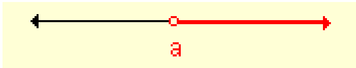
Intervalo semiabierto a derecha (o semicerrado a izquierda)

Es el conjunto de números reales formado por a y los números comprendidos entre a y b.

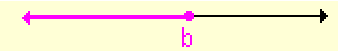
Intervalos infinitos



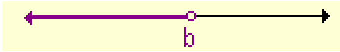
[a, +∞) = { x / x ≥ a}



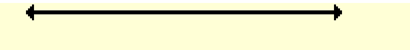
(a, +∞) = { x / x > a}



(-∞, b] = { x / x ≤ b}



(-∞, b) = { x / x < b}

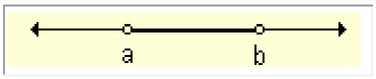
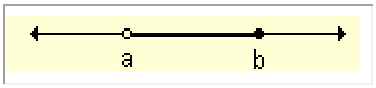
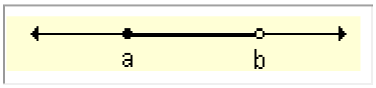
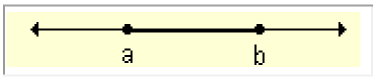
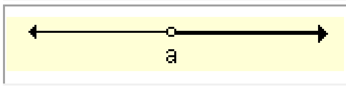
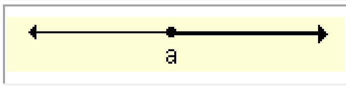
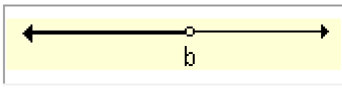
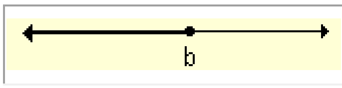
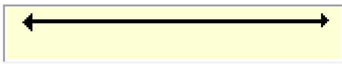


(-∞, +∞) = R

Ejemplo. Interprete gráficamente los intervalos:

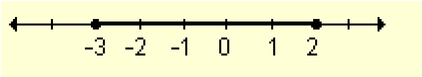
a) [1/2 , 3] b) (1,4) c) (0,5] d) [1,∞) e) (-∞ , 3)

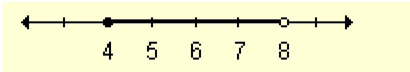
A modo de resumen:

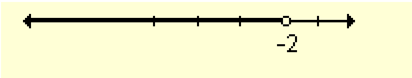
Nombre del intervalo	Notación conjuntista	Notación de intervalos	Representación gráfica
Abierto	{x / a < x < b}	(a, b)	
Semicerrado a derecha	{x / a < x ≤ b}	(a, b]	
Semicerrado a izquierda	{ x / a ≤ x < b}	[a, b)	
Cerrado	{ x / a ≤ x ≤ b}	[a, b]	
Infinito abierto a izquierda	{ x / x > a}	(a, +∞)	
Infinito cerrado a izquierda	{ x / x ≥ a}	[a, +∞)	
Infinito abierto a derecha	{ x / x < b}	(-∞ , b)	
Infinito cerrado a derecha	{ x / x ≤ b}	(-∞ , b]	
Infinito	R	(-∞ , +∞)	

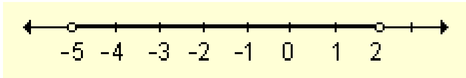
EJERCICIOS

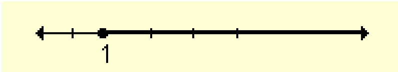
1) Escriba como intervalo el conjunto definido sobre la recta real.

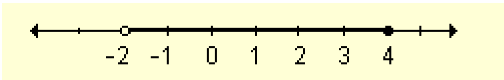
A)


B)


C)


D)


E)


F)


2) Escriba, si es posible, como intervalo o unión de intervalos los siguientes conjuntos de números reales:

a) A = {x ε R / 5 <x < 9}
b) B = {x ε R/ -1 ≤ x ≤ 3}
c) C = {x ε R/ x < -2 ∧ x > 2}
d) D = { x / -4 < x < 2 ∧ x ≠ -1}

3) Escriba en notación conjuntista los siguientes intervalos de números reales:

a) $\left(\frac{5}{4}, 3\right)$
b) (-∞ , -1]
c) (-7, -2]
d) $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$
e) $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$
f) [4, 9]

Respuestas:

1. $A = [-3; 2]$ $\quad B = [4;\ 8)$ $\quad C = (-\infty;\ -2)$ $\quad D = (-5; 2)$

   $E = [1;\ \infty)$ $\quad F = (-2; 4]$

2.

a) A= (5; 9)
b) B= $[-1;\ 3]$

c) C=(-∞;-2)U(2;∞)
d) D=(-4; -1)U(-1; 2)

3. .

a) A= { x ε R/ $\frac{5}{4} < x < 3$}
b) B={x x ε R/ x ≤-1}
c) C= { x ε R/ $-7 < x \le -2$}

d) D = { x ε R/ x>$\frac{4}{3}$}
e) E= { x ε R/ $-\frac{5}{2} \le x < \frac{1}{2}$}
f) F= { x ε R/ $4 \le x \le 9$}

Para revisar tus conocimientos matemáticos te recomendamos resolver y recordar operaciones con números reales, en particular con irracionales con las siguientes actividades de cálculo.

1. Marquen con x los números irracionales.

$1.\ 0,\widehat{3}$ ☐ $2.\ \sqrt{25}$ ☐ $3.\ -\pi$ ☐ $4.\ \frac{1}{7}$ ☐ $5.\ \sqrt[5]{2}$ ☐

2. Clasifiquen las siguientes expresiones en racionales (R) y irracionales (I).

$1.\ 2+\sqrt{3}$ ☐ $2.\ \sqrt{2+7}$ ☐ $3.\ \sqrt{2}.\sqrt{8}$ ☐ $4.\ \sqrt{10}$ ☐ $5.\ \sqrt{5}+\sqrt{7}$ ☐ $6.\ \sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$ ☐

3. Coloquen para cada raíz cuadrada los números enteros consecutivos entre los cuales se encuentra el resultado de la misma.

_____ $< -\sqrt{7} <$ _____   _____ $< \sqrt{17} <$ _____

_____ $< -\sqrt{19} <$ _____   _____ $< -\sqrt{28} <$ _____

_____ $< \sqrt{35} <$ _____   _____ $< \sqrt{51} <$ _____

_____ $< -\sqrt{76} <$ _____   _____ $< \sqrt{103} <$ _____

_____ $< \sqrt{130} <$ _____   _____ $< -\sqrt{188} <$ _____

4. Represente en la recta real los siguientes números irracionales.

$1.\ \sqrt{7}$ $2.\ \sqrt{5}$ $3.\ \sqrt{10}$ $4.\ -\sqrt{10}$ $5.\ \sqrt{12}$

$6.\ -\sqrt{17}$

Indicar los números opuestos del ejercicio anterior

5. Ordenar: a) en forma creciente
   b) en forma decreciente

6. Marquen con una x (V) verdadero o falso (F)

1_	$1<\sqrt{5}<2$	V ☐	F ☐	4_	$5<\sqrt{37}<6$	V ☐	F ☐
2_	$3<\sqrt{11}<4$	V ☐	F ☐	5_	$7<\sqrt{83}<8$	V ☐	F ☐
3_	$4<\sqrt{22}<5$	V ☐	F ☐	6_	$10<\sqrt{111}<11$	V ☐	F ☐

Respuestas:

1. Marquen con x los números irracionales.

$1.\ 0,\widehat{3}$ ☐ $2.\ \sqrt{25}$ ☐ $3.\ -\pi$ x $4.\ \frac{1}{7}$ ☐ $5.\ \sqrt[5]{2}$ x

2. Clasifiquen las siguientes expresiones en racionales (R) y irracionales (I).

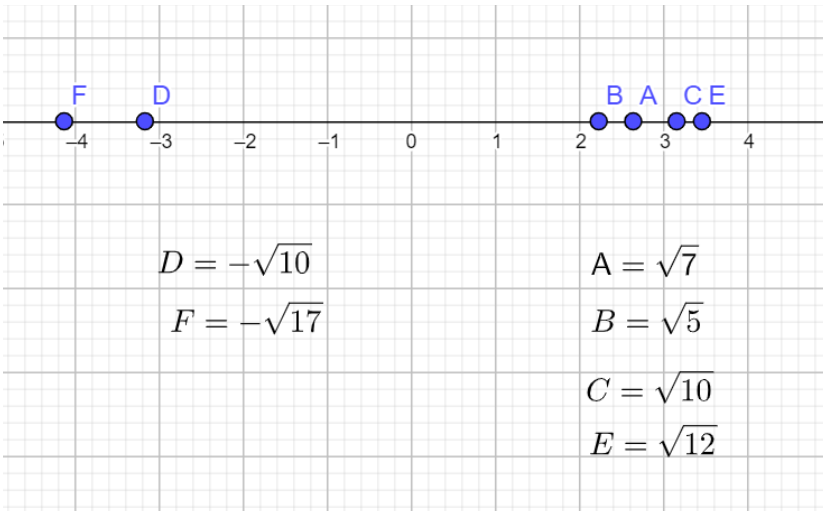
1. $2+\sqrt{3}$ $\boxed{\text{I}}$ 2. $\sqrt{2+7}$ $\boxed{\text{R}}$ 3. $\sqrt{2}.\sqrt{8}$ $\boxed{\text{R}}$ 4. $\sqrt{10}$ $\boxed{\text{I}}$ 5. $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ $\boxed{\text{I}}$ 6. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$ $\boxed{\text{R}}$

3. Coloquen para cada raíz cuadrada los números enteros consecutivos entre los cuales se encuentra el resultado de la misma.

-3 < - $\sqrt{7}$ < -2	4 < $\sqrt{17}$ < 5
-5 < - $\sqrt{19}$ < -4	-6 < - $\sqrt{28}$ < -5
5 < $\sqrt{35}$ < 6	7 < $\sqrt{51}$ < 8
-9 < - $\sqrt{76}$ < -8	10 < $\sqrt{103}$ < 11
11 < $\sqrt{130}$ < 12	-14 < - $\sqrt{188}$ < -13

4. Represente en la recta real los siguientes números irracionales.

1. $\sqrt{7}$ 2. $\sqrt{5}$ 3. $\sqrt{10}$ 4. $-\sqrt{10}$ 5. $\sqrt{12}$
6. $-\sqrt{17}$



Indicar los números opuestos del ejercicio anterior

$-\sqrt{7}$ $\quad -\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{10}$ $\quad -\sqrt{10}$ $\quad \sqrt{12}$ $\quad -\sqrt{17}$

5.. Ordenar: a) en forma creciente

$-\sqrt{17}$ $\quad -\sqrt{10}$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad \sqrt{7}$ $\quad \sqrt{10}$ $\quad \sqrt{12}$

b) en forma decreciente

$\sqrt{12}$ $\quad \sqrt{10}$ $\quad \sqrt{7}$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad -\sqrt{10}$ $\quad -\sqrt{17}$

6.. Marquen con una x (V) verdadero o falso (F)

1_	$1<\sqrt{5}<2$	V [ ]	F [x]		4_	$5<\sqrt{37}<6$	V [ ]	F [x]
2_	$3<\sqrt{11}<4$	V [x]	F [ ]		5_	$7<\sqrt{83}<8$	V [ ]	F [x]
3_	$4<\sqrt{22}<5$	V [x]	F [ ]		6_	$10<\sqrt{111}<11$	V [x]	F [ ]

NTRODUCCION A FUNCIÓN

El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones

Dr. José Luis Díaz Gómez

Historia del Concepto de Función Kleiner en un artículo (1989) opina que el concepto de función se remonta 4000 años atrás, y que la noción de función no surgió en forma explícita sino hasta principios del siglo XVIII y en el transcurso de casi 200 años (1450-1650 D.C.) Por otro lado, Youschkevitch (1976) distingue varias etapas principales del desarrollo del concepto de función hasta la mitad del siglo XIX. Siguiendo un poco la idea de Youschkevitch en nuestro estudio consideramos las siguientes etapas:

- La Antigüedad: En la cual considera principalmente la Matemática Babilónica (2000 a. c. –600 a. c.) y la Griega.
- La Edad Media: La cual se divide en dos fases; la Fase Latina (5001200) y la no Latina (1200-1500).
- Período Moderno: En el que se distingue a partir del siglo XVIII cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función.

La antigüedad

Mientras Pedersen (1974) opina que los matemáticos babilónicos poseyeron un auténtico “instinto de funcionalidad”, ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, y esto si está presente en las numerosas tablas de cálculos de los babilónicos Youschkevitch, asegura que no hay ninguna idea en general de función en esta matemática.

En los elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticos. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, pero no a las funciones, se consideran a los números enteros y discretos, y a las magnitudes continuas. Esto hace difícil construir la noción de función, puesto que los números, así considerados, sólo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza. En esta etapa se llevan a cabo estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes, sin embargo, no se llegaron a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función. Para algunos investigadores, cualesquiera que hayan sido las causas y circunstancias que condujeron a las características de la ciencia antigua, el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función (Youschkevitch 1976, pág. 40).

La edad media

El desarrollo del concepto de función en el período medieval se puede dividir en dos partes: una fase no latina desde el año 500 hasta el 1200, y una fase latina, aproximadamente desde el año 1200 hasta el 1500. Las contribuciones del Período no Latino incluyendo las matemáticas Hindús y Árabes, caen en el campo del álgebra y la trigonometría. Encontraron soluciones de ecuaciones con una incógnita. Pero, la idea de variable no surgió, y de este modo, no se consideró que una ecuación con dos incógnitas establecía una relación funcional entre dos variables (Boyer, 1946).

En el Período Latino a partir del siglo XIII hasta bien entrado el período moderno aparecieron con notable regularidad tratados sobre proporciones. Estos trabajos equivalen a un álgebra de relaciones del tipo $y= kx^n$, donde n tiene un valor racional. . Esta teoría de proporciones fue básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de Newton (Boyer, 1946, pág. 9).

Por su parte Oresme intentó dibujar también ciertas funciones para las cuales la tasa de cambio no era constante, las gráficas en estos casos eran líneas quebradas o curvilíneas. La latitud de formas representó una teoría primitiva de funciones en la que esta tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra.

Pero les faltó el lenguaje del álgebra con el cual expresar la ley de variación o la correspondencia funcional (Boyer, 1946, pág. 10).

Periodo Moderno

En el transcurso de 200 años (1450-1650) ocurrieron una serie de desarrollos que fueron fundamentales para el surgimiento del concepto de función:

• La unión del álgebra y la geometría;

• La introducción del movimiento como un problema central en la ciencia;

• La invención del álgebra simbólica, y

• La invención de la geometría analítica (Kleiner, 1989, pág. 283).

Esto es en el siglo XVII surge una ciencia matematizada que sugiere una “visión dinámica y continua de la relación funcional, en oposición a la visión estática y discreta sostenida por los antiguos” (Kleiner, 1989, pág. 283). La palabra “función” apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz de agosto de 1673, la introdujo para designar un objeto geométrico asociado con una curva, v. g. coordenadas de un punto sobre la curva o la pendiente de una curva (Youschkevitch, 1976, pág. 56) y en 1718 Johan Bernoulli en un artículo dio la primera definición formal de función como: “Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes”.(Rüthing, 1984.) A partir del siglo XVIII se perciben cuatro etapas principales en el desarrollo del concepto de función. Matemáticos prominentes están asociados con cada una de estas etapas.

Primera Etapa

En la primera etapa donde la función es una ecuación o fórmula está asociada con Euler (1707-1783). Euler definió una función siguiendo la definición dada por su maestro Bernoulli como: “Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes” (Rüthing, 1984, pág. 72). Mérito grande de Euler es el de incluir expresamente las funciones implícitas además de las explícitas.

Esta noción de función permaneció sin cambio hasta los inicios de 1800 cuando Fourier en su trabajo sobre las series trigonométricas, encontró relaciones más generales entre las variables.

Segunda Etapa

En 1822 Fourier dio un paso revolucionario en la evolución del concepto de función, al dar una definición de función en la que hacía notar que lo principal era la asignación de valores para la función; que ésta asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas no era de importancia. La definición de Fourier es: “En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única” (Rüting, 1984.)

Tercera etapa

En 1829 Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de función y

f (x) =ax de una variable independiente en un intervalo a < x < b. Esta definición fue extremadamente general, no decía ni una sola palabra sobre la necesidad de dar a la función por medio de una formula, sobre todo el dominio de definición. Definió función de la siguiente forma: “y es una función de una variable x, definida en el intervalo a<x<b, si a todo valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia” (Kleiner, 1989). Debates entre muchos matemáticos famosos incluyendo a Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, Weirstrass, Lebesgue y Borel dieron ímpetu al continuo desarrollo histórico del concepto de función

Cuarta etapa

La última etapa está asociada con Bourbaki en 1939 y se caracterizó por la arbitrariedad del dominio y el rango.

Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son “Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para toda x E, existe un único y F el cual está en la relación dada con x. (Rüthing, 1984). Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios. Desarrollo Reciente. La discusión de cómo los matemáticos deben definir las funciones no ha cambiado significativamente desde el milenio pasado. Sin embargo, el tema no ha sido completamente resuelto.

Ideas pedagógicas

El análisis de la evolución histórica nos proporciona evidencias acerca de que, la enseñanza del concepto de función ha experimentado un desarrollo análogo al histórico (Dreyfus, 1990, pág. 120). Nos muestra también que algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función, se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII.

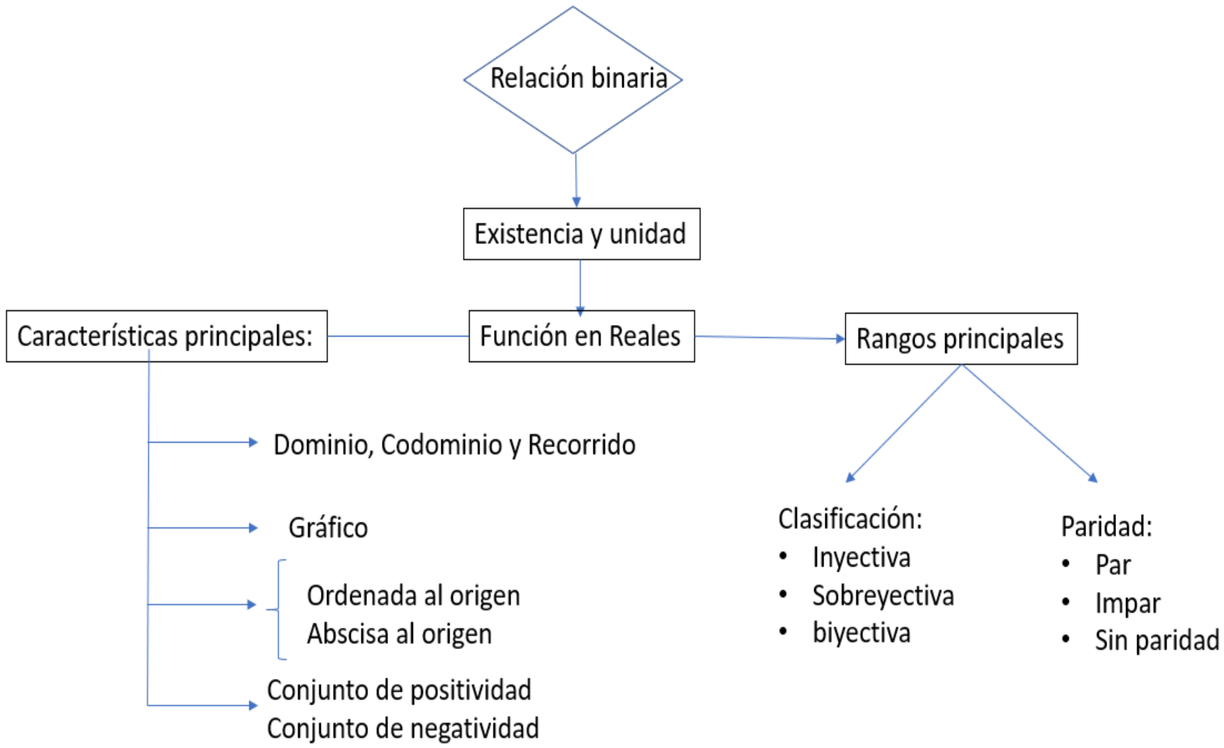
También pone de manifiesto las diferentes formas bajo las cuales se ha revelado el concepto de función, y los obstáculos epistemológicos significativos ligados a su desarrollo histórico. Y nos permite obtener algunas ideas pedagógicas. Entre ellas se mencionan las siguientes:

• Debemos de buscar que el estudiante se interese en la explicación de los cambios y, en encontrar regularidades entre los cambios.

• Se debe de proporcionar un amplio espectro de formas de dar las funciones, de hablar sobre las funciones y representar las funciones.

• Los estudiantes deben de ser capaces de decir no sólo qué cambia, sino también cómo cambia.

• Se deben de utilizar los métodos de interpolación para el uso y construcción de tablas numéricas, ya que estas proporcionan contextos matemáticos dentro de los cuales se obtienen niveles más profundos de la noción de función.



Clasificación de funciones

• **ALGEBRAICAS:** Se obtienen efectuando sobre la variable independiente sólo operaciones racionales y radicaciones en un número finito de veces.
Ej. $y = 2x + 3\sqrt{2}$

• **TRASCENDENTES:** Son aquellas donde la variable independiente está afectada por cualquier otra función.
Ej. $y = \log x$ (logarítmica) $y = sen\,x$ (trigonométrica) $y = 2^x$ (exponencial)

Algebraicas

- **Racionales**: Se efectúa sobre la variable sólo operaciones racionales (suma, resta, multiplicación y división) un número finito de veces.
  Ej. $y = 4x + 1$
- **Irracionales**: efectuando, además de las operaciones rac., radicaciones en un número finito de veces.
  Ej. $y = \sqrt[3]{x} + x$

Racionales

- **Enteras:** La variable no está afectada por cociente. (monomios y polinomios)
  Ej. $y = 2x + 4$
- **Fraccionarias**: Cocientes de monomios y polinomios.
  Ej. $y = \frac{2}{x} + 6$

Enteras

- **De primer grado ó lineal**. Ej. $y = 5x + 1$
- **De segundo grado ó cuadrática**. Ej. $y = 2x^2 + 5x - 8$
- **De grado n** . Ej. $y = ax^n + ... + c$

Funciones

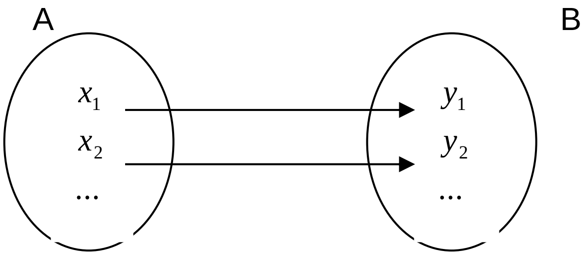
Concepto de función:

Originalmente surgió como una idea de relación de dependencia entre magnitudes.

La intención es destacar nociones asociadas al concepto de funciones ej.: variación de magnitudes, interpretación en gráficos, utilización de métodos numéricos para la resolución de problemas en forma apropiada, etc.

Creemos que es necesario mostrar la diferencia entre el “problema real”, es decir, aquel cuyo enunciado y datos surgen del contexto cotidiano, y el problema matemático planteado para resolver el mismo. El problema matemático surge luego de simplificar una situación real. Cuando hablamos de funciones desde el punto de vista matemático se asocia al concepto, varios elementos a saber:

***Definición*:** Llamaremos función a una determinada relación que existe entre dos conjuntos dados, “A” y “B” donde para cada valor que asume uno de los elementos del conjunto “A” le corresponde un único y determinado valor en el conjunto “B”.



$A = \{x_1\ x_2 \ldots\ldots\}$

$B = \{y_1\ y_2\ \ldots\ldots\}$

Si se establece una relación entre estos dos conjuntos tenemos que los elementos del conjunto A (que son los primeros componentes de los pares ordenados), constituyen lo que denominamos el **Dominio** que puede llamarse Campo de definición ó Campo existencial.

Los elementos del conjunto B lo denominamos **Condominio** y otra forma universalmente aceptada es indicar con una “y” al elemento que le corresponde a “x” (o sea, a f(x)).

Cuando se adopta esta forma de escribir las funciones se refiere a “x” como la variable independiente y a “y” como la variable dependiente.

Se simboliza como: y = f(x) ; esta última expresión nos será de utilidad para extraer la ecuación general y lograr graficar.

Ejes Cartesianos Ortogonales

Son dos rectas que se cortan a 90° y dividen al plano en 4 cuadrantes. Dichos cuadrantes se enumeran contrarios al movimiento de las agujas del reloj.

Las rectas al cortarse se transforman en semirrectas: 2 positivas y 2 negativas.

Los ejes se denominan x e y, recibiendo el nombre de absisa y ordenada, respectivamente.

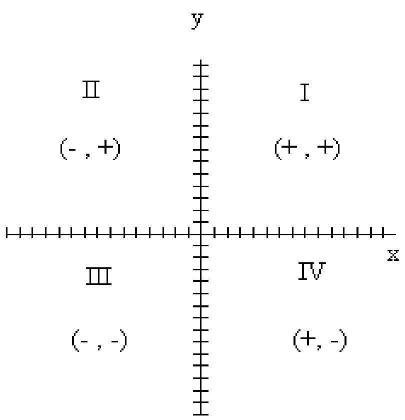


Fig. 1

Coordenadas

Sea **P** cualquier punto del plano (Fig.1). La recta vertical que pasa por **P** corta al eje x en un solo punto; sea **a** la coordenada de ese punto sobre el eje x.

El número **a** se llama **coordenada x** de P (o **abscisa de P**). La recta horizontal que pasa por **P** corta al eje y en un solo punto; sea **b** su coordenada sobre el eje y.

El número **b** se llama **coordenada y** de P(u **ordenada** de P). De esta forma, todo punto **P** del plano tiene un único par (a,b) de números reales asociados con él. Recíprocamente, todo par (a,b) de números reales está asociado a un único punto del plano.

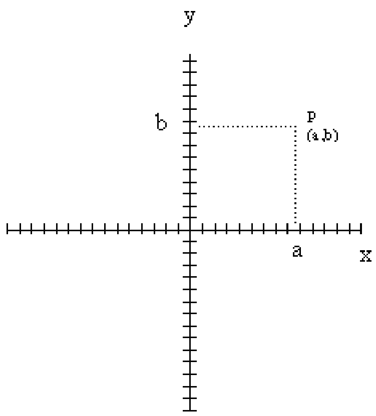


Fig. 2

Representación gráfica de funciones

El tener una función $f: A \to R$ (con $A \subset$R) automáticamente nos da un cierto subconjunto de R^2 que se denomina gráfico de f y se define de la siguiente manera:

$$Graf(f) = \left\{ (x, y) \in R^2 : x \in A,\ y = f(x) \right\}$$

o sea $Graf(f)$ es el conjunto de todos los pares ordenados que se obtienen tomando como primer elemento un x cualquiera de **A** y como segundo elemento el $f(x)$ que le corresponde a x por la función dada.

Como dada una función, $Graf(f)$ es un subconjunto de R^2 y ya que R^2 se puede representar geométricamente como un plano, entonces $Graf(f)$ se puede representar geométricamente como un subconjunto del plano. Dicha representación se denomina **representación gráfica** de la función f.

INTRODUCCIÓN A FUNCIÓN: APLICACIONES

Leer e interpretar las siguientes aplicaciones matemáticas

APLICACIÓN 1

INFORME SOBRE UNIDAD DE VALOR ADQUISITIVO (UVA)

Los siguientes datos fueron extraídos del Banco Central de la República Argentina sobre el precio del UVA al comienzo de cada mes durante un año:

Fecha	Costo por UVA
01 / Diciembre / 2018	29,81
01 / Noviembre / 2018	28,21
01 / Octubre / 2018	26,73
01 / Septiembre / 2018	25,90
01 / Agosto / 2018	25,05
01 / Julio / 2018	24,31
01 / Junio / 2018	23,77
01 / Mayo / 2018	23,13
01 / Abril / 2018	22,61
01 / Marzo / 2018	22,17
01 / Febrero / 2018	21,66
01 / Enero / 2018	21,15

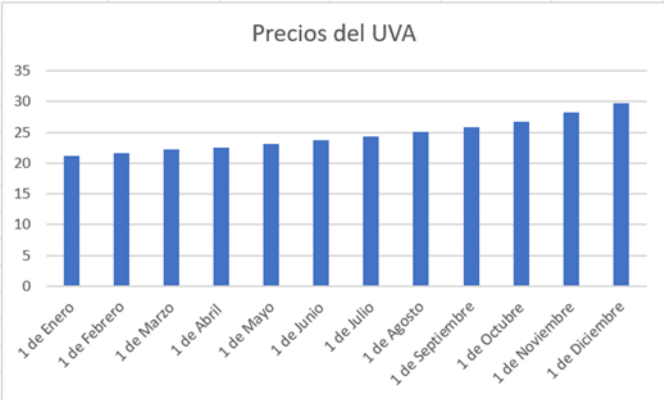
a. A partir de los datos extraídos de la tabla, interpretar y realizar el grafico que representa el movimiento del UVA

b. A partir del gráfico, analizar si es o no factible obtener la expresión simbólica del movimiento mencionado. Justificar.

Respuestas

a. .

Fecha	Costo por UVA
1 de Enero	21,15
1 de Febrero	21,66
1 de Marzo	22,17
1 de Abril	22,61
1 de Mayo	23,13
1 de Junio	23,77
1 de Julio	24,31
1 de Agosto	25,05
1 de Septiembre	25,9
1 de Octubre	26,73
1 de Noviembre	28,21
1 de Diciembre	29,81



b. No es Factible ya que una variable se encuentra en forma coloquial.

APLICACIÓN 2

MONSERRAT: COMIENZA UN PROGRAMA PILOTO DE SEPARACIÓN DE BASURA

Vecinos, comerciantes y cartoneros trabajarán en conjunto

San Telmo, Constitución, son algunos de los barrios ubicados alrededor del microcentro que siguen teniendo sus veredas sucias, aun cuando el camión recolector para hasta dos y tres veces al día.

A raíz del problema surge hoy en Monserrat un programa piloto bautizado: “Recolección diferenciada de residuos”. El objetivo es modificar los hábitos de los vecinos, los comerciantes y los cartoneros para cambiar el escenario habitual que ofrecen esas veredas.

El Gobierno porteño observa que el vecino saca las bolsas de residuos fuera de horario, los cartoneros las revisan y las rompen para obtener los materiales que venderán para vivir, luego, cuando los recolectores de basura levantan las bolsas rotas, queda un reguero de desperdicios detrás del camión, que horas después levantará el barrendero. Recién a las tres de la mañana la calle queda limpia. ¿Se puede modificar ese cuadro?

El programa abarca 12 cuadras, delimitadas por las avenidas Belgrano e Independencia, y por las calles San José y Lima. Pero hoy se empezará a comprobar la efectividad del proyecto en 4 cuadras: El primero en Venezuela y San José, el segundo en México y Salta y el tercero, sobre Independencia y Virrey Ceballos. Más adelante se colocarán otros tres contenedores más.

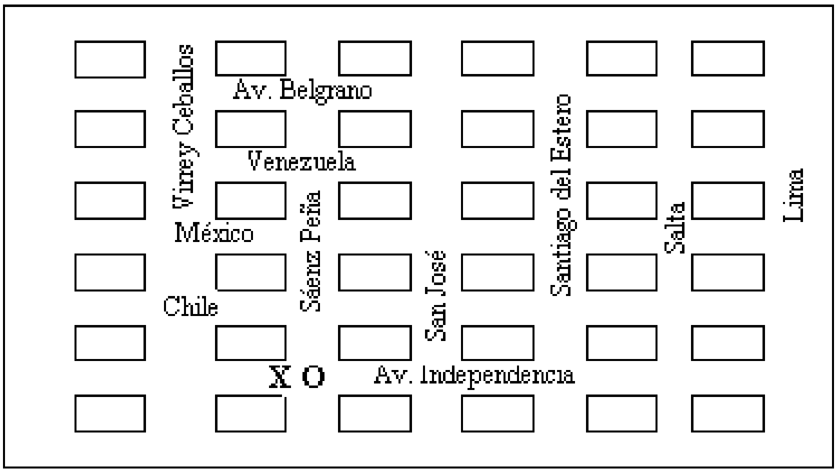
Los pasos que pretenden seguir el programa son los siguientes:

Los vecinos y comerciantes tendrán que separar la basura. En bolsas, pondrán papel y cartón, envases de vidrio y de plásticos, y metales (desde latas de cerveza hasta de conservas). Esta bolsa será depositada, de 19 a 21 hs, en los contenedores o entregada en mano al cartonero. Los residuos orgánicos, y también aerosoles, lámparas o escombros, serán colocados en otras bolsas, en la vereda, entre las 20 y 21 hs, para que las retiren, después de las 21, los camiones. Los cartoneros –ya fueron contactados por el Gobierno unos 70- recogerán las bolsas de los contenedores, de 19 a 21 hs.

En esa área hay 22 restoranes. La comuna ya renovó las veredas, colocó 84 papeleros y plantó 64 jacarandás. Ahora empieza el combate por la basura.

FUENTE: Diario Clarín- Sección La Ciudad

13 de diciembre de 2014



Resolver:

a. Ubicar en el plano las cuadras afectadas por el programa piloto

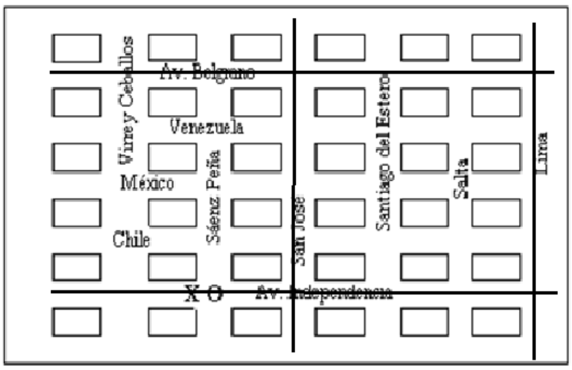
b. Señalar en el plano con una cruz la ubicación aproximada de los tres primeros contenedores (aclaradas en el artículo)

c. Confeccionar los ejes cartesianos cuyo origen de coordenadas sea el punto O (señalado en el plano) y tomen en cada eje una unidad

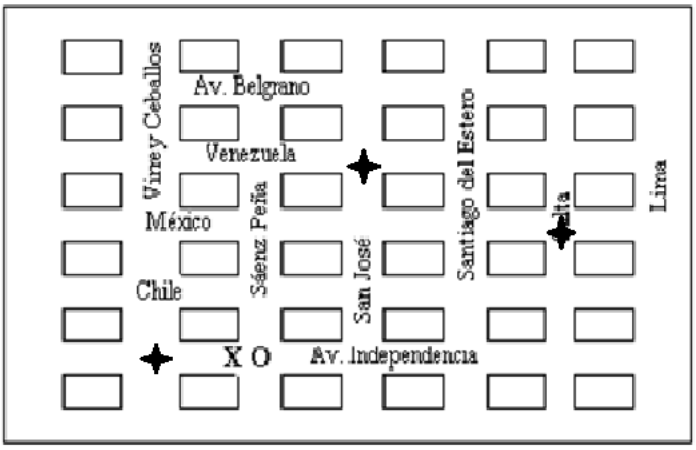
d. Escriban las coordenadas de ubicación de cada contenedor con respecto al sistema de ejes

Respuestas

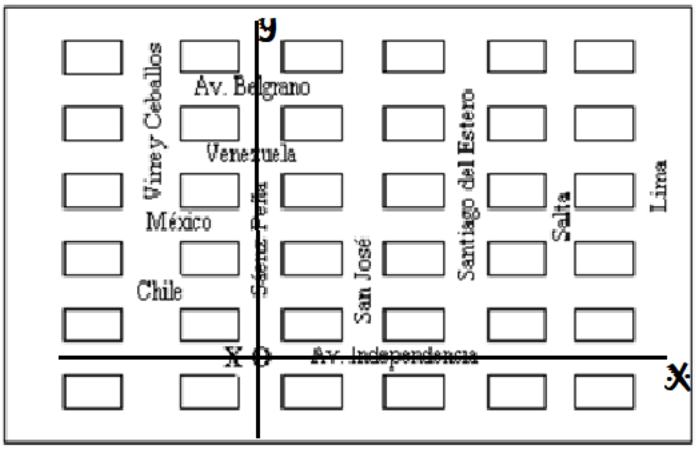
a. Ubicar en el plano las cuadras afectadas por el programa piloto



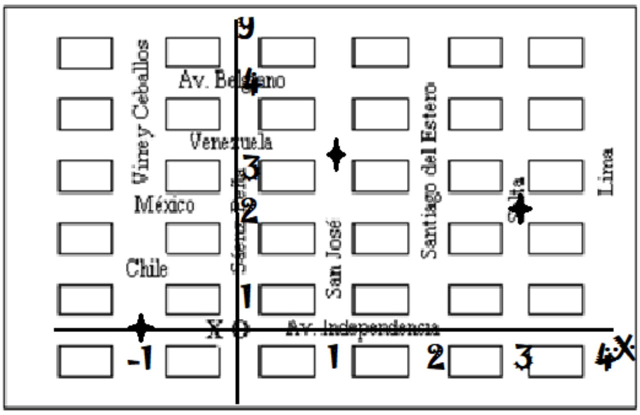
b. Señalar en el plano con una cruz la ubicación aproximada de los tres primeros contenedores (aclaradas en el artículo)



c. Confeccionar los ejes cartesianos cuyo origen de coordenadas sea el punto O (señalado en el plano) y tomen en cada eje una unidad



d. Escriban las coordenadas de ubicación de cada contenedor con respecto al sistema de ejes



A=(San José; Venezuela)

B=(Salta; Mexico)

C=(Independencia; Virrey Ceballos)

A=(1;3)

B=(3;2)

C=(-1; 0)

FUNCIÓN LINEAL

“La realidad de la función de las funciones, no es más que buscar la relación que existe entre el concepto de función, en general, y el de lineal en particular con los hechos cotidianos que nos rodean”

Marco histórico

Apolonio de Perge utilizaba la idea de las coordenadas. Nació en el año 262 ac. En Perge, Grecia Ionia (Turquía) y falleció alrededor del 190 ac en Alejandría Egipto. “[…] Apolonio fue conocido como “el gran geómetra”, en su famoso libro “Secciones Cónicas” introdujo términos como: parábola, elipse e hipérbola. La famosa obra consta de 8 libros, del 1 al 4 introduce propiedades básicas de las cónicas. Del 5 al 7 discute y muestra como muchas de las cónicas pueden ser dibujadas desde un punto.

Muchos de sus libros están perdidos y otros sólo existen en traducción arábiga. También obtuvo una aproximación de Pi entre $22/7 < \pi < 223/71$ conocido por Arquímedes. Obtuvo también una curva fundamental llamada parábola.

El trabajo de Apolonio “[…] sirvió de base para el estudio de la geometría de estas curvas hasta los tiempos del filósofo y científico René Descartes en el siglo XVII.

Nicole Oresme (s. XIV d.c) había representado gráficamente las funciones usando las coordenadas. Oresme fue un matemático francés nacido en el año 1325 y fallecido en el 1382. Obispo de Lisieux su obra teológica es poco conocida, pero en cambio dejó una extensa obra científica sobre matemática y astronomía y llevó numerosas traducciones críticas sobre las obras de Aristóteles. Aplicó el cálculo de las proporciones y geometría al estudio del movimiento.

René Descartes nacido el 31 de marzo de 1596 en la Haye, Touraine Francia y fallecido en febrero de 1650 en Estocolmo, Suecia, unificó ambas consideraciones, las mejoró y las amplió. A partir de entonces tenemos las representaciones gráficas y los ejes cartesianos. Usó las coordenadas para representar los puntos. En realidad, cabe destacar que el nombre ejes cartesianos no se debe a Descartes, sino a un matemático posterior llamado: Maurice Fréchet, quien los llamó así en su honor. Fréchet nacido en Maligny en el año 1878 y fallecido en París en 1973. Lo inquietaron los métodos de los geómetras griegos para llegar a sus ingeniosas pruebas sin un sistema fundamental de ataque y se propuso corregirlos mediante el manejo de líneas y figuras tridimensionales en una gráfica. Dibujaba la gráfica marcando unidades en una línea horizontal (eje x) y una línea vertical (eje y); así, cualquier punto de la gráfica podía describirse con dos números. El primero corresponde a la distancia en el eje X y el segundo representa la distancia en el eje Y. Aunque conservaba las reglas de la geometría euclidiana, combinaba la geometría y el álgebra, consideradas entonces como independientes, para formar una nueva disciplina matemática llamada geometría analítica. El 8 de junio de 1637 Descartes dio al mundo su geometría analítica como un apéndice.

En distintas publicaciones el término función aparece utilizado o introducido en la historia de distintas maneras y por distintos exponentes, pero todas coinciden en destacar la importancia de Descartes en este tema.

“[…] Una función, en matemática, es el término utilizado para indicar una relación entre dos o más cantidades. El término función fue utilizado por primera vez en 1637 por René Descartes para designar una potencia x^n de la variable X. En 1694 el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta recientemente su uso más generalizado ha sido definido en 1829 por el matemático alemán Dirichlet (1805-1859), quien escribió: “Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ello. Dos variables X e Y están asociadas de tal forma que, al asignar un valor a X, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a Y, se dice que Y es una función (unívoca) de X. La variable X, a la que se le asigna valores libremente, se la llama variable independiente, mientras que Y, cuyos valores dependen de X, se llama variable dependiente. Los valores permitidos de X constituyen el dominio de la función, y los valores de Y, constituyen el recorrido.

En este breve desarrollo histórico, se puede observar que el concepto del término función es muy actual ya que pertenece al siglo XIX. Por esto es importante brindarles a los conceptos la importancia que se merecen y al avance histórica de los mismos.

Aplicación

Alrededor del 1900 el concejo internacional para la exploración del mar (CIEM) inició una investigación de las propiedades iónicas del agua de mar y encargó la investigación al danés Martin Knudsen, relacionar la clorinidad (contenido de cloruros), salinidad y densidad del agua de mar, para lo cual primero debió definir el término salinidad, dando así, en 1902 la primera definición : “El contenido de sal es el peso de las sales inorgánicas en un kg de agua de mar si todo el bromo y el yodo son reemplazados por una cantidad equivalente de cloro.” El tiempo de calentamiento fue de 72 horas a 420°c. Knudsen preparó veinticuatro muestras para determinar la clorinidad, sólo utilizó nueve. Dado que la determinación de la salinidad era en ese entonces muy difícil de realizar, afectada por numerosas dificultades técnicas. Knudsen propuso entonces definir la salinidad en términos de clorinidad de acuerdo a la siguiente ecuación:

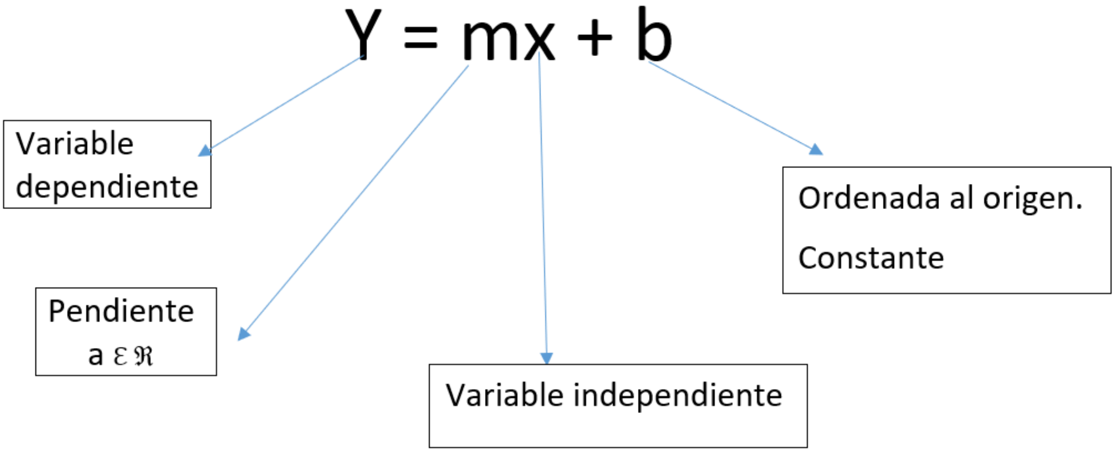
$S(Cl) = 1,805\ Cl + 0,03$

Aclaraciones:
Se analiza el cloro dentro de las partes por mil
S: salinidad
Cl: cantidad de cloro en agua

a. Calcular la cantidad Cl en agua de mar con una salinidad de 0,35 (35 gs/litro).
b. Un estudio determinó que en el Mar Muerto hay aproximadamente 10 veces la cantidad de Cl en muestra de agua. ¿Qué cantidad de Cl y de salinidad contiene mencionado mar?
c. ¿Puede estar relacionado estos valores con su nombre?

Se llama función lineal a una función polinómica de grado menor o igual a 1.

Una función lineal es una relación $\mathcal{F}: \Re \longrightarrow \Re$
Dada por $\mathcal{F}$(x) = mx + b con a, b ε $\Re$



Las funciones, en este caso la lineal, se representan en el plano ($\Re^2$), para ello se utilizan dos ejes uno horizontal llamado **EJE DE ABSCISAS** (eje X), y uno vertical llamado **EJE DE ORDENADAS** (eje Y). Este sistema de ejes se denomina **EJES CARTESIANOS.**

Su gráfico es una recta con pendiente **m** y ordenada al origen **b,**

$\mathcal{F} : \Re \longrightarrow \Re$ **/** Y = f(x) = mx +b

Si bien es cierto que el gráfico de una función lineal es rectilíneo, no lo es que toda recta representa una función lineal Y = f(x), como es la definida por el conjunto:

A = { (x ; y) ε $\Re^2$ / x = 1 }

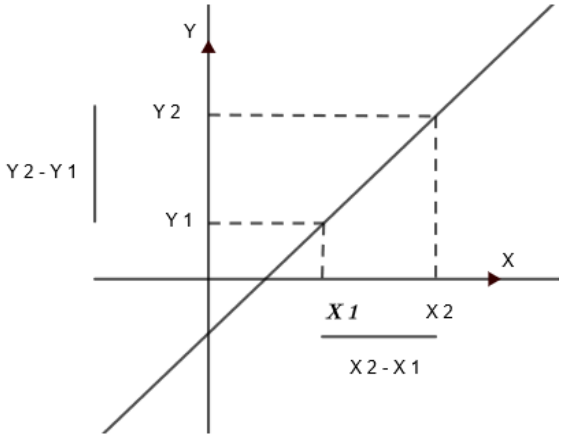
Que inmediatamente reconocemos como una recta vertical que corta el eje x en x = 1, y por lo tanto infringe las condiciones exigidas a las funciones.

Ordenada al origen:
Es la ordenada del punto en el que la gráfica de la función corta al eje y. Es el valor que toma Y cuando la X vale cero.

Pendiente:
La pendiente de la recta es una medida de su inclinación. La pendiente indica cuánto varía la función (Y), por unidad de la variación de la variable independiente (X).
Sabiendo que bastan dos puntos para definir una recta, tomemos dos cualesquiera de la recta (X_1 ; Y_1), (X_2 ; Y_2) con distinta abscisa, a medida que vamos de un punto a otro el cambio en X es (X_2 - X_1), y el cambio en Y es (Y_2 - Y_1).

La pendiente es la razón del cambio en Y dividido por el cambio en X.

$$\mathbf{m} = \frac{Y_2 - Y_1}{X^2 - X_1}$$

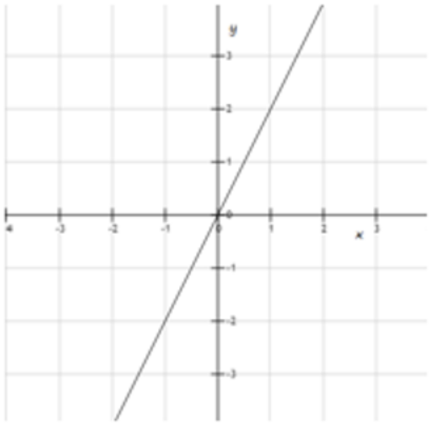


Ejemplo: determina la pendiente de la recta que une los puntos A (2 ; 4) y (3 ; -2).

m = $\frac{-2-4}{3-2}$ = -6

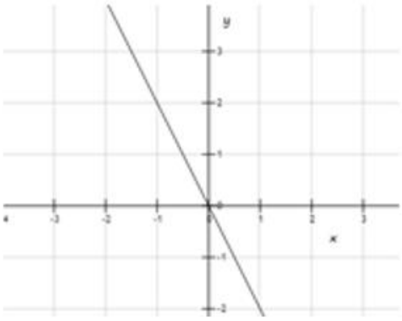
- Si $m > 0$, la función es creciente.

Ejemplo $y = 2x$



- Si $m < 0$ la función es decreciente.

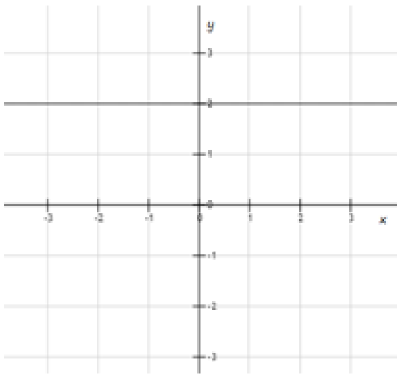
Ejemplo $y = -2x$



- Si $m = 0$ la función es constante (recta horizontal).

La grafica es una recta horizontal paralela al eje de las abscisas. Y la ecuación de la recta que forma está dada por la siguiente fórmula: $y = m.0 + b$

$y = 2$



Ejercicio 1

Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a. A (8;4) y B (-3;5)
b. C (-6;1) Y D (-4; -4)
c. E (3;2) y F (-2;3)

Respuestas:

a. $m = -\frac{1}{11}$
b. $m = -\frac{5}{2}$
c. $m = -\frac{1}{5}$

Ceros o raíces de una función

Dada una función $\mathcal{F} : A \longrightarrow B$ decimos que un número a es una raíz de la función si su imagen(y) a través de la misma es nula, o lo que es lo mismo, $\mathcal{F}\ (a) = 0$.
Gráficamente nos indica el punto (a ; o) donde el gráfico de la función corta el eje de abscisas (x).

Los puntos de intersección de la gráfica de una función con los ejes, son de mucha importancia.

Dada la función f : A ⟶ B , a ε A es una raíz de f sii F (a) = 0

Para hallar los ceros de una función de manera analítica, basta con igualar la ecuación a cero.

Ejemplo

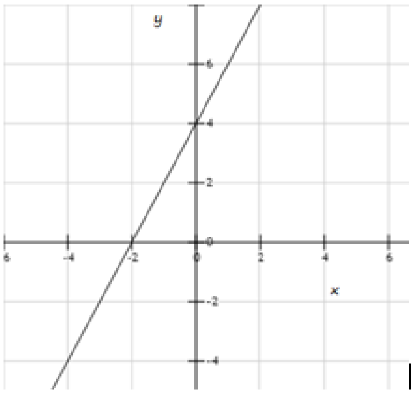
$y = 2x + 4$

$0 = 2x + 4$

$-4 = 2x$

$-4 : 2 = x$

$\boxed{x = -2}$ es la raíz de la función estudiada en la gráfica:



Recta que pasa por un punto y tiene pendiente conocida

Si conocemos la pendiente m de una recta y las coordenadas de un punto (X_1; Y_1) de la misma, entonces la ecuación se expresa como:

$$\boxed{Y - Y_1 = m\,(X - X_1)}$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1 ; 4), cuya pendiente m = $\frac{2}{3}$

$Y - 4 = \frac{2}{3}(X - (-1)) \longrightarrow Y - 4 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \longrightarrow$ $\mathbf{Y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}$

Ejercicio 2

Para cada uno de los siguientes casos determina la ecuación de la recta y grafica.

a. m = 3 A (4;3)
b. m = -2/3 B (5;3)
c. m = 0 C (-2;2)

Respuesta

a. $y = 3x - 9$
b. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$
c. $y = 2$

Recta que pasa por dos puntos determinados

Hallar la ecuación de una recta sabiendo que la misma pasa por dos puntos (X_1; Y_1); (X_2; Y_2) siendo que pasa por (X_1; Y_1) podemos aplicar la ecuación de la recta que pasa por un punto dado:

$Y - Y_1 = m\,(X - X_1)$

Falta calcular la pendiente como lo hicimos anteriormente. Reemplazando nos queda:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) \qquad \text{o} \qquad \boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Ejemplo:

Obtener la ecuación de la recta en su forma general que pasa por los puntos $A = (-5;-3)$ y $B = (2;4)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{4 - (-3)}{2 - (-5)}.(x - (-5))$$

$$y + 3 = \frac{4 + 3}{2 + 5}.(x + 5) \qquad\qquad y + 3 = 1.(x + 5)$$

Como la piden en su forma general, se debe obtener de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y + 3 = x + 5$$
$$-x + y + 3 - 5 = 0$$
$$-x + y - 2 = 0$$

Como el término *A* debe ser positivo, multiplicamos por – 1 toda la ecuación:

$x - y + 2 = 0$ Forma General

$y = -x + 2$ Forma Explícita

Formas de expresar la ecuación de la recta:

1. Explícita

   Es cuando la variable "*y*" está despejada $y = mx + b$

   Ejemplo $y = \frac{4}{3}x + 4$

2. Implícita

   Es cuando las componentes de la ecuación se encuentran del mismo lado de la igualdad. $ax + by + c = 0$

   Ejemplo $\frac{4}{3}x - y + 4 = 0$

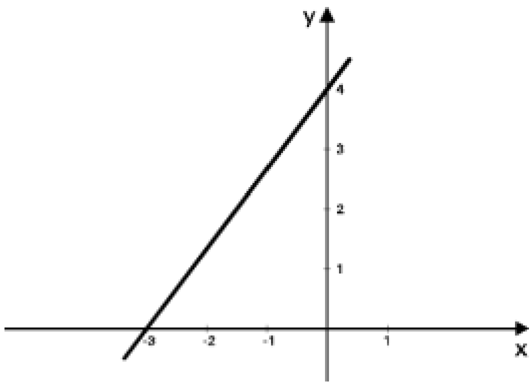
3. Segmentaria

   Es una recta del plano que no pasa por el origen $(0;0)$ y que intercepta a ambos ejes coordenados n los puntos $A = (a;0)$ y $B = (0;b)$, su ecuación simétrica es:

   $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$

   Ejemplo $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$

   La gráfica de los ejemplos queda:



En la misma se puede verificar las intersecciones con los ejes coordenados

Ejercicio 3
Determinar en cada caso la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B. Graficarlas.

a) A (0;0)
B (5;4)

b) A (3;2)
B (-3;2)

c) A (1/3;-5)
B (-7;0)

Respuestas

a) $y = \frac{4}{5}x$

b) $y = 2$

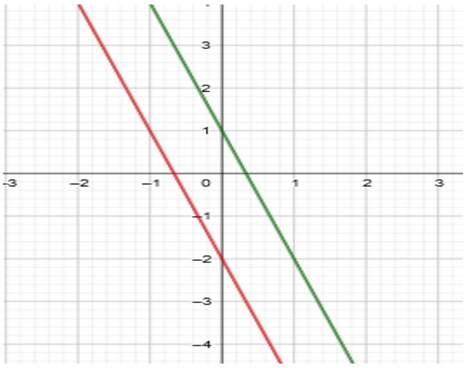
c) $y = -\frac{15}{22}x - \frac{105}{22}$

●https://www.youtube.com/watch?v=bo3JsAc9CbE

Rectas paralelas y perpendiculares

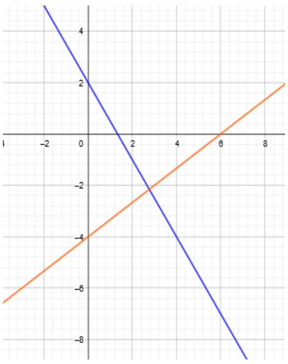
●Dos o más rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x - 2 \end{cases}$$



●Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocas y opuestas.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 2 \\ y = \dfrac{2}{3}x - 4 \end{cases}$$



Extras…

●https://www.youtube.com/watch?v=hkLnRAgdQ-0
●https://www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_944450&feature=iv&src_vid=hkLnRAgdQ-0&v=PS4xnU3f0kU

●https://www.youtube.com/watch?v=ZesQdtU9UZE
●https://www.youtube.com/watch?v=_ZIV6IBa-OA

Trabajo Práctico

Ejercicio 1
Completar la siguiente tabla:

Función	Pendiente	Ordenada al origen
Y = 3x +2		
Y = -4 + $\frac{2}{3}x$		
3 = 2x +3y		
y =	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

Ejercicio 2
Determina la ecuación de la recta y graficarlas, si:

a. m = -5/3 y P (-3;4)
b. m = 2 y P (2; -7)

Ejercicio 3
Dadas las rectas: $f(x) = 2.x + 1$; $h(x) = 2 - x$ responder verdadero o falso justificando su respuesta:

a) El par $(1;1) \in h(x)$ b) El punto $(1;1) \in f(x)$
c) Las gráficas de f y h son paralelas. d) El punto $(1;3) \notin f(x)$

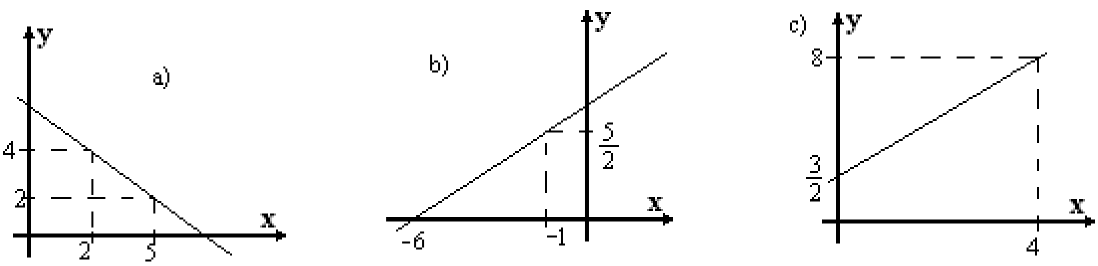
Ejercicio 4

Hallar la ecuación de la recta y representarla que pasa por los puntos A (0;2) y B (2;1). Indicar la pendiente y la ordenada al origen ¿Cuál es el significado de estos valores? Verificar el resultado gráficamente.

Ejercicio 5
Plantea, resuelve e interpreta gráficamente los siguientes problemas, pon de manifiesto en cada uno de ellos las variables que intervienen. Suponiendo que la relación entre las variables es lineal, escribe la ecuación que las vincula.

a. El prospecto de un medicamento indica una dosis de 2,5 mg por kilogramos de peso del paciente.
b. Una empresa de servicios médicos ofrece un plan de $1000 por grupo familiar, con un adicional de $100 por cada estudio.
c. El valor de una maquina fotocopiadora nueva es de $5200. Después de 2 años de uso su valor es de $4225. Encuentra su valor después de 5 años.

Ejercicio 6
Expresar la ecuación de la recta correspondiente según cada gráfico.



Ejercicio 7
Obtén el valor de k, de modo que 3kx + 5y – 2 = 0 sea una recta que:

a. Pase por el origen.
b. Pase por P (-2; -4)

Ejercicio 8
Escribe las ecuaciones explicitas de las rectas que contienen a los lados del romboide ABCD si
A (2; -2), B (4; -1), C (6; -2), D (4; -5). Graficar.

Ejercicio 9
Obtener el área del triángulo determinado por la recta **r** y los ejes de coordenadas, siendo r la recta que pasa por P (4;1) y es perpendicular a la recta **s** : y = ½ X

Ejercicio 10
Obtener h y k de manera tal que las rectas 3y -5x -3 = 0 ; 2kx + y + h = 0 sean:

a. Perpendiculares
b. Paralelas
c. Coincidentes

Ejercicio 11
Determina el número a de modo que la pendiente de la recta que pasa por los puntos
P (-2; 3a), S (4; -a) tenga el valor m = -5/12

Ejercicio 12

Dada la función $f(x) = -\frac{2}{5} . x + 1$

a) Indicar la pendiente y la ordenada al origen. ¿Cuál es el significado de cada uno?
b) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con cada eje?
c)Calcular las imágenes de 2, $\frac{1}{3}$, - 4 , 0
d) ¿A qué valor del dominio (valor de x) le corresponde las siguientes imágenes: -1, 0 y 3?
e) Escribir la ecuación de la recta que es paralela a la dada y que corta al eje de ordenadas en –2.
f) Escribir la ecuación de la recta que es perpendicular a la dada y que corta al eje y en 3.
g) Representar las tres rectas en el mismo gráfico.

Ejercicio 13

Encuentra k de modo que las gráficas de $7y = kx + 3$ y $\frac{1}{3}y = \frac{1}{10}x - 1$ sean paralelas.

Ejercicio 14

Escribe la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ si P (1/2; -1) y Q (-1/2;3). Graficar.

Ejercicio 15

Para reparar un piso de madera un especialista cobra $50 el metro cuadrado, más una suma fija por viático de $20.

a. Escribe la función lineal que relaciona el precio del arreglo en función de la superficie a reparar.
b. Si se desea reparar 20m cuadrados, ¿cuál es el importe a pagar?

¿cuántos metros cuadrados deberá reparar para ganar $230

Respuesta

Ejercicio 1. Completar la siguiente tabla:

Función	Pendiente	Ordenada al origen
Y = 3x +2	3	2
$Y = -4 + \frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}$	-4
3 = 2x +3y	$-\frac{2}{3}$	1
$y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$

Ejercicio 2. Determinar la ecuación de la recta y graficar

a. $y = -\frac{5}{3}x - 1$
b. $y = 2x - 11$

Ejercicio 3. Dadas las rectas: $f(x) = 2.x + 1$; $h(x) = 2 - x$ responder verdadero o falso justificando su respuesta:

a) El par $(1;1) \in h(x)$. Falso

h(1)=2.1+1
h(1)=3

b) El punto $(1;1) \in f(x)$. Verdadero

f(1)= 2- 1
f(1)=1

c) Las gráficas de f y h son paralelas. Falso

m_1 = 2 (pendiente de la función f(x))
m_2 = -1 (pendiente de la función h(x))

como $m_1 \neq m_2$; no son paralelas

d) El punto $(1;3) \notin f(x)$. Falso

f(1)=2.1 + 1
f(1)=3. El punto (1;3) ε f(x)

Ejercicio 4

Hallar la ecuación de la recta y representarla que pasa por los puntos A (0;2) y B (2;1). Indicar la pendiente y la ordenada al origen ¿Cuál es el significado de estos valores? Verificar el resultado gráficamente.

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Donde: $m = -\frac{1}{2}; \textit{se denomina pendiente e indica la inclinación de la recta}$

$b = +2;$ $\textit{se denomina ordenada al origen e indica la intersección con el eje } y.$

Ejercicio 5
Plantea, resuelve e interpreta gráficamente los siguientes problemas, pon de manifiesto en cada uno de ellos las variables que intervienen. Suponiendo que la relación entre las variables es lineal, escribe la ecuación que las vincula.

d. El prospecto de un medicamento indica una dosis de 2,5 mg por kilogramos de peso del paciente.

$$y = 2{,}5x$$

e. Una empresa de servicios médicos ofrece un plan de $1000 por grupo familiar, con un adicional de $100 por cada estudio.

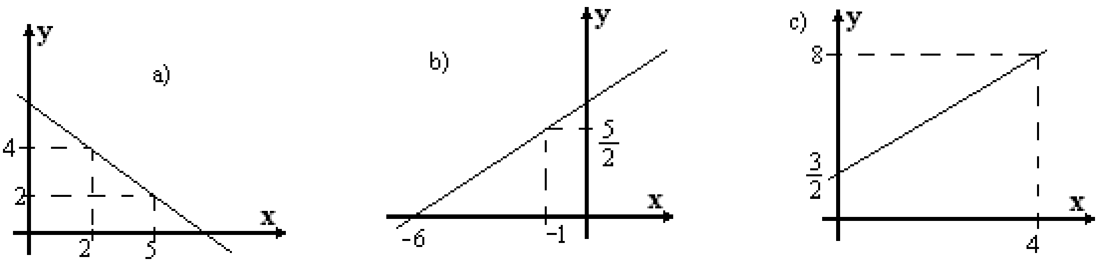
$$y = 100x + 1000$$

f. El valor de una maquina fotocopiadora nueva es de $5200. Después de 2 años de uso su valor es de $4225. Encuentra su valor después de 5 años.

$$Y = -487{,}5X + 5200$$

Ejercicio 6

Expresar la ecuación de la recta correspondiente según cada gráfico.



a) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = \frac{13}{8}x + \frac{3}{2}$

Ejercicio 7

Obtén el valor de k, de modo que 3kx + 5y – 2 = 0 sea una recta que:

a. Pase por el origen.

No hay valor de k que cumpla con la condición pedida

b. Pase por P (-2; -4)

Cuando k=$-\frac{11}{3}$, la recta pasa por el punto P

Ejercicio 8

Escribe las ecuaciones explicitas de las rectas que contienen a los lados del romboide ABCD si

A (2; -2), B (4; -1), C (6; -2), D (4; -5). Graficar.

R1:

A (2; -2) y B (4; -1) $y_1 = \frac{1}{2}x - 3$

R2:

B (4; -1) y C (6; -2) $y_2 = -\frac{1}{2}x + 1$

R3:

C (6; -2) y D (4; -5) $y_3 = \frac{3}{2}x - 11$

R4:

D (4; -5) y A (2; -2) $y_4 = -\frac{3}{2}x + 1$

Ejercicio 9

Obtener el área del triángulo determinado por la recta **r** y los ejes de coordenadas, siendo r la recta que pasa por P (4;1) y es perpendicular a la recta **s** : y = ½ X

Área= $\frac{81}{2}cm^2$

Ejercicio 10

Obtener h y k de manera tal que las rectas 3y -5x -3 = 0 ; 2kx + y + h = 0 sean:

a. Perpendiculares

$$k = \frac{3}{10} \bigwedge h \, \varepsilon \, R$$

b. Paralelas

$$k = -\frac{5}{6} \bigwedge h \, \varepsilon \, R$$

c. Paralelas Coincidentes

$$k = -\frac{5}{6} \bigwedge h = -1$$

Ejercicio 11

Determina el número a de modo que la pendiente de la recta que pasa por los puntos P (-2; 3a), S (4; -a) tenga el valor m = -5/12

a = $\frac{5}{8}$

Ejercicio 12

Dada la función f(x) = - $\frac{2}{5}$. x + 1

a) Indicar la pendiente y la ordenada al origen. ¿Cuál es el significado de cada uno?

- $m = -\frac{2}{5}; \textit{se denomina pendiente e indica la inclinación de la recta}$
- $b = +1; \;\; \textit{se denomina ordenada al origen e indica la intersección con el eje } y.$

b) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con cada eje?

$\cap x$: (-$\frac{5}{2}$; 0)

$\cap y$: (0; 1)

c)Calcular las imágenes de 2, $\frac{1}{3}$, - 4 , 0

$$f(2) = \frac{1}{5} \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{15} \qquad f(-4) = \frac{13}{5} \qquad f(0) = 1$$

d) ¿A qué valor del dominio (valor de x) le corresponde las siguientes imágenes: -1, 0 y 3?

$$f(x) = -1 \;\Rightarrow\; x = 5$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f(x) = 3 \;\Rightarrow\; x = \;-5$$

e) Escribir la ecuación de la recta que es paralela a la dada y que corta al eje de ordenadas en –2.

$$y = -\frac{2}{5}x - 2$$

f) Escribir la ecuación de la recta que es perpendicular a la dada y que corta al eje y en 3.

$$y = \frac{5}{2}x + 3$$

g) Representar las tres rectas en el mismo gráfico.

Ejercicio 13

Encuentra k de modo que las gráficas de 7y = kx +3 y $\frac{1}{3}\, y = \frac{1}{10}\, x - 1$ sean paralelas.

K=$\frac{21}{10}$

Ejercicio 14

Escribe la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ si P (1/2; -1) y Q (-1/2;3). Graficar.

Ejercicio 15

Para reparar un piso de madera un especialista cobra $50 el metro cuadrado, más una suma fija por viático de $20.

c. Escribe la función lineal que relaciona el precio del arreglo en función de la superficie a reparar.
d. Si se desea reparar 20m cuadrados, ¿cuál es el importe a pagar?

¿cuántos metros cuadrados deberá reparar para ganar $230

FUNCIÓN CUADRÁTICA

LINKS VIDEOS

1) https://youtu.be/YlhOfpREfHE
2) https://youtu.be/Pg9IYdWYSkU
3) https://youtu.be/5yMSAPeiLUo

LINK TEÓRICO

http://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf

PREGUNTAS:

¿Cuál es la expresión polinómica de una función cuadrática? ¿Por qué el coeficiente a no puede valer cero?

¿Cuál es la importancia/Qué información nos brinda el coeficiente a y por qué no puede valer cero?

¿Cómo puede clasificarse al extremo de cada parábola y qué relación tendrá con la imagen?

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Lo maravilloso de la matemática es que da sentido, según el momento histórico, el bagaje cultural y la brillantez de los personajes que aparezcan los descubrimientos pueden darse antes, después o en simultáneo. ¿Quién inventó la función cuadrática? No hay una respuesta, no es un invento. En primer lugar, es una función (concepto matemático relativamente reciente) polinómica de segundo grado (la resolución de ecuaciones de segundo grado ha sido durante muchísimos siglos) cuya representación es una curva conocida como parábola, la cual puede obtenerse también desde la geometría pura, como lugar geométrico (todos los puntos del plano que equidisten de una recta llamada directriz y de un punto, foco) o como sección cónica: intersección entre un cono y un plano paralelo a la generatriz.

Si comenzamos un rastreo histórico llegamos a Apolonio de Perga (262-190 aC) quien fue el tercer gran matemático de la edad de oro de la geometría griega, supo aunar en su persona la especialización técnica y el virtuosismo geométrico, por lo que se lo conoce como *el gran geómetra*. En su tratado sobre las cónicas aportó descubrimientos sobre los elementos geométricos de estas curvas, producto de la sección de un cono con un plano, tales como sus ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, rectas máximas y mínimas (tangentes y normales), introdujo términos que hoy en día utilizamos como el de parábola. Si bien las curvas de segundo orden o secciones cónicas ya habían sido descubiertas por otro matemático griego, Menecmo, perteneciente a la academia platónica, Apolonio fue el primero en estudiarlas en profundidad y describir la propiedad geométrica que todavía se emplea para construir objetos de gran utilidad como antenas satelitales o colectores solares.

Encontramos también a Hipatía (370-415) que no sólo es la primera mujer que registra la historia de la Matemática, sino que escribió varios documentos, en algunos de los cuales trató la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado tanto como las propiedades de la parábola.

Saliendo de Occidente, en la cultura India también se aproximaron a su estudio, considerando que dicha cultura estaba regida por movimientos filosóficos o períodos que coexistieron y se respetaron con un enfoque de filosofía de la pluralidad, contaban también con una mirada técnica de la matemática, como una herramienta para la resolución de sus necesidades, razón que justifica el hecho de que existan matemáticos hindúes que trabajaran en la creación de tablas (trigonométricas) o algoritmos. Fue Brahmaguptra quien desarrolló ecuaciones de grado mayor a 1, de la forma $ax^2 + b = cy^2$ que pueden contener varias soluciones y altos valores. Bhaskara (1114-1185) siguió su legado, se encargó de realizar demostraciones visuales y deductivas, a través de la geometría como la correspondiente al cuadrado del binomio, trabajaba fluidamente con valores negativos y fue el primero en reconocer que las raíces pares de números positivos tienen dos soluciones. El matemático escribió varios libros dejando registro del conocimiento acumulado en su cultura, y en particular la aplicación de ecuaciones de segundo grado a problemas habituales, donde se obtenían dos soluciones y una generalmente era descartada por ser matemáticamente correcta aunque sin sentido en términos del problema. Actualmente, conocemos a la fórmula resolvente de ecuaciones de segundo grado, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ como fórmula de Bhaskara y es la que permite encontrar las raíces de una función cuadrática. Sin embargo, el concepto de función tardó un tiempo más en aparecer.

Ya los griegos estudiaban a las curvas por medio de ecuaciones, por lo que se conocían las ecuaciones que determinabas algunas cónicas, pero en el álgebra del Renacimiento se continúa con su desarrollo gracias a las notaciones propuestas por Viéte aunque estuvo totalmente desvinculada de la geometría, a la que se identificaba con el arte; el surgimiento de los calculistas de la mano del concepto de incógnita permiten vincular a la geometría con el álgebra, como un primer esbozo de lo que sería la geometría analítica.

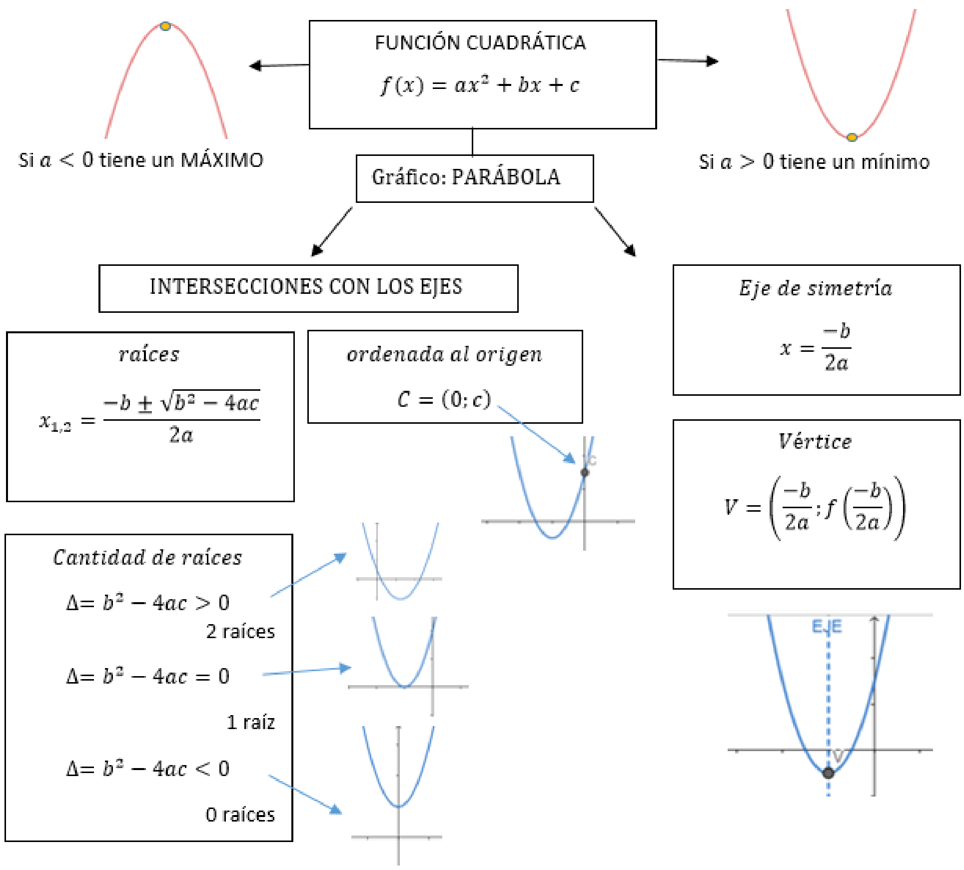
En el siglo XVII, a consecuencia de la perspectiva de ciencia que impulsa Galileo, desde la combinación y fusión del bagaje cultural, comienzan a surgir distintas ramas de la matemática como la geometría analítica y el análisis matemático, por ejemplo, y nace la idea de función. Actualmente, las funciones describen relaciones y nos ayudan a analizar comportamientos como el valor de una acción en la bolsa, la ganancia de un negocio o la cantidad de una sustancia en nuestro cuerpo. Algunos de estos comportamientos, en los que la variable se encuentra al cuadrado, están descriptos por funciones cuadráticas, caso en el que se combinan las ideas de resolución de ecuaciones cuadráticas y de parábola, ya no entendida como lugar geométrico sino como representación de una relación funcional, donde a cada valor de x se le asignará siempre un único valor de y.

Dentro de las aplicaciones de la función cuadrática, podemos encontrar contextos propios de la matemática (problemas intramatemáticos) como la relación entre el lado de un cuadrado y su área, o bien en otros contextos, se aplica en ciencia, negocios, ingeniería, deporte (trayectoria de una pelota) y otras actividades. Su conocimiento permite, por ejemplo, describir una trayectoria parabólica, predecir las ganancias y las pérdidas de un negocio, ayudar en la determinación de valores máximos o mínimos, por nombrar algunas aplicaciones.

PREGUNTAS:

1) ¿Qué conceptos matemáticos se involucran en la resolución de funciones cuadráticas?
2) ¿Cuáles son sus aplicaciones?

RESUMEN DEL TEMA:



Llamamos función cuadrática a la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b, c números reales con $a \neq 0$ cuya representación geométrica es una parábola. Tal como se mencionó en la introducción histórica, una parábola es una curva que pertenece al grupo de las cónicas. De la misma manera que una recta está definida por dos puntos, una cónica se define si conocen cinco de sus puntos. Su principal característica es que presenta un eje de simetría que la subdivide en dos ramas opuestas y congruentes, de modo que sobre él se halle un punto extremo de la función, ya que puede ser el más alto o más bajo del gráfico y se lo conoce como vértice.

Por ser una función polinómica, podemos afirmar que el dominio se compone por todos los números reales y, por definición de función sabemos que a cada valor del dominio le corresponde obligatoriamente una imagen, así toda función cuadrática cortará en uno y sólo un punto al eje de ordenadas: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$

Sin embargo, según su posición y el valor de sus coeficientes, una función cuadrática puede tener un punto de corte con el eje de las abscisas, dos, o ninguno; para hallarlos analíticamente se hace uso de la fórmula de resolvente, o de Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Queda en evidencia que dependiendo del valor del radicando que, en particular para esta expresión recibe el nombre de *discriminante* (Δ), podremos reconocer la cantidad de soluciones que se obtendrán de la fórmula; así, si el discriminante es positivo, obtendremos dos raíces reales distintas, de ser negativo la función presentará dos raíces complejas conjugadas, lo que significa que en el gráfico cartesiano no se observarán puntos de corte y se dice que no tiene raíces. Si el discriminante fuese cero, ambas raíces coincidirán, dado que si en (1) se suma o resta cero dará el mismo valor: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, en dicho caso la parábola presenta una raíz doble, lo cual implica que el gráfico rebotará sobre el eje horizontal y –de este modo- la raíz será a la vez vértice de la función.

La fórmula anterior $x = \frac{-b}{2a}$ es aplicable para el cálculo del eje de simetría de toda función cuadrática aunque también, pensando en que el eje divide a la gráfica a la mitad, se deduce que coincidirá con el punto medio de las raíces. En otras palabras, como las raíces equidistan del eje, se puede hallar la fórmula del eje de simetría como la semisuma de las raíces: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Dado que el vértice es un punto perteneciente al eje de simetría, podemos notar que el valor de su abscisa será $Vx = \frac{-b}{2a}$ y por lo tanto, se podrá determinar su ordenada, simplemente calculando la imagen para dicho punto de la función: $Vy = f(Vx)$.

Cuando la función es cóncava hacia arriba (concavidad positiva), el *valor y* del vértice Vy es el menor que alcanzará la misma en todo su dominio, por lo que se dice que presenta un mínimo, mientras que si la concavidad es negativa, va hacia abajo y la función tiene un máximo. Analíticamente es fácil de reconocer cuál será la concavidad y el tipo de extremo que presente, pues el signo del coeficiente principal *a* es un indicador: si es positivo, es cóncava hacia arriba, si es negativo, cóncava hacia abajo.

EJEMPLO:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

1) Información que nos brinda la forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$

a=-2 → el signo determina la concavidad: CONCAVIDAD NEGATIVA o hacia abajo, su vértice será un máximo

b=-4

c=+6 → ordenada al origen/ intersección con el eje y (0;6)

2) Intersecciones con el eje x: RAÍCES

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)} \rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-4}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{4 + 8}{-4} = -3$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{4 - 8}{-4} = 1$$

Tiene dos raíces reales distintas, corta al eje x en dos puntos: -3 y 1

3) Eje de simetría (puede calcularse de dos maneras)

I. $x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-2)} \rightarrow x = \frac{4}{-4} \rightarrow \boldsymbol{x = -1}$

II. $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x = \frac{-3+1}{2} \rightarrow x = \frac{-2}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = -1}$

4) Coordenadas del vértice, por la concavidad ya sabemos que será un máximo

V=(Vx;Vy)

Vx = eje de simetría → $Vx = -1$

$Vy = f(Vx)$ → $Vy = f(-1)$

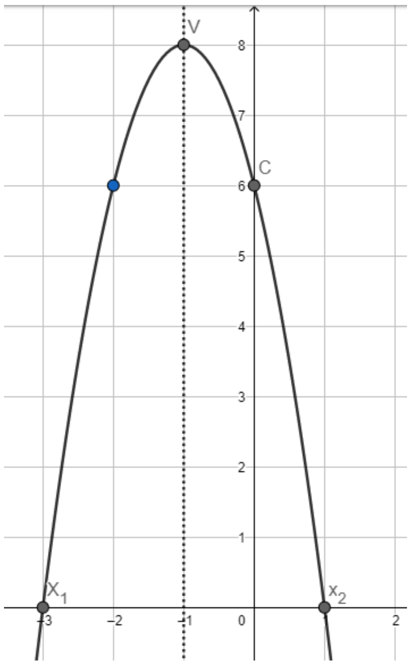
$$f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6$$

$$f(-1) = -2 \cdot 1 + 4 + 6$$

$$f(-1) = 8$$

→ V=(-1;8)

5) Gráfico: ubicar el eje de simetría, sobre él al vértice, marcar las raíces y comprobar que equidisten del eje, luego marcar a la ordenada al origen y a su punto simétrico:

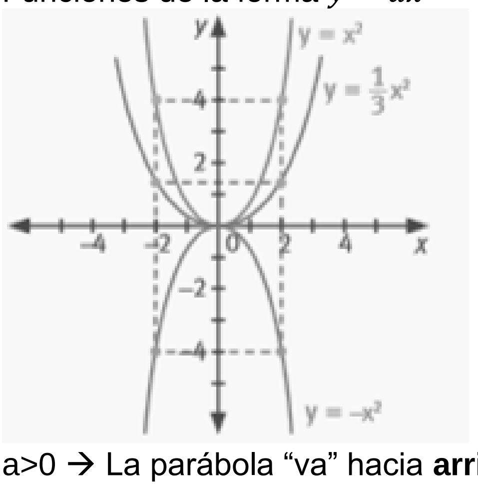


Dominio: $\mathbb{R}$
Imagen: $[8; -\infty)$
Concavidad negativa o hacia abajo
Tipo de extremo: Máximo
Vértice: (-1;8)
Eje de simetría: x=-1
Raíces: $x = \{-3; 1\}$
Ordenada al origen: y=6
Punto simétrico de la ordenada: (-2;6)

…otros aspectos
Intervalo de crecimiento: $(-\infty; -1)$
Intervalo de decrecimiento: $(-1; +\infty)$
Conjunto de positividad: $(-3; 1)$
Conjunto de negatividad: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$
Conjunto de ceros: $\{-3; 1\}$

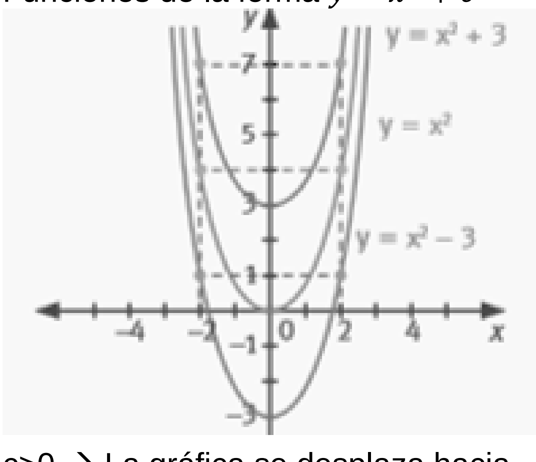
INTERPRETACIÓN DE LOS COEFICIENTES

Funciones de la forma $y = ax^2$



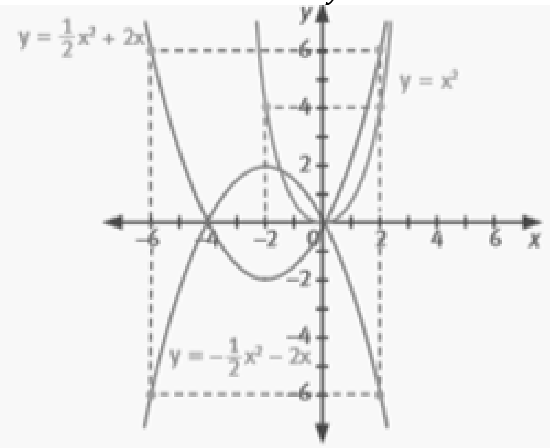
a>0 → La parábola “va” hacia **arriba**
a<0 → La parábola “va” hacia **abajo**
0<lal<1 → La parábola se **abre**
lal>1 → La parábola se **cierra**

Funciones de la forma $y = x^2 + c$

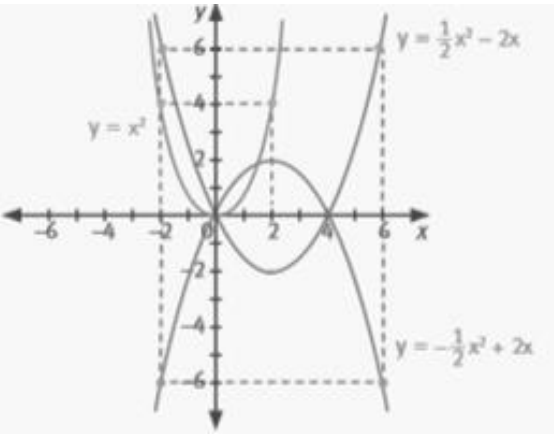


c>0 → La gráfica se desplaza hacia **arriba**
c<0 → La gráfica se desplaza hacia **abajo**

Funciones de la forma $y = ax^2 + bx$



Si a y b tiene el mismo signo, la gráfica se desplaza hacia la **izquierda**



Si a y b tiene distinto signo, la gráfica se desplaza hacia la **derecha**

A continuación dejamos un link en el que se pueden explorar las modificaciones que acontecen en el gráfico a medida que se modifican los valores de los coeficientes: https://www.geogebra.org/m/zVjtM7Gg

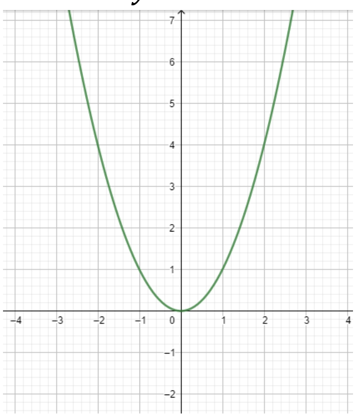
DISTINTAS EXPRESIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA:

En base a los elementos de la parábola ya definidos, una función cuadrática puede expresarse en forma canónica o factorizada. Lo interesante de estas estructuras es que cada una brinda información diferente y, si al trabajarlas algebraicamente podemos llevarlas de una a otra.

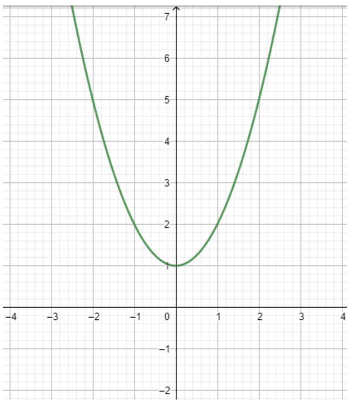
FORMA CANÓNICA $\quad y = a \cdot (x - Vx)^2 + Vy$

Al reconocer las coordenadas del vértice y la concavidad es posible esbozar un gráfico basándose en los corrimientos de otra función, centrada en el origen y con mismo coeficiente principal, por ejemplo para *a=1*:

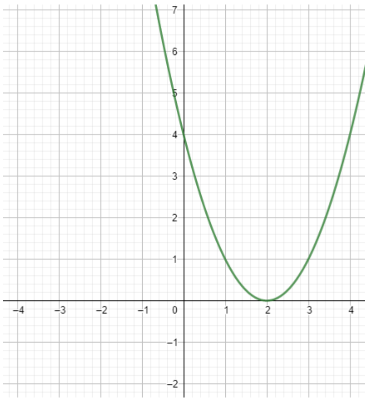
$y = x^2$



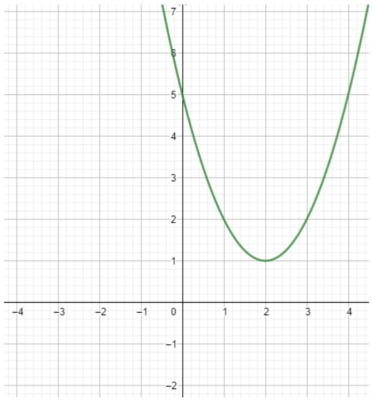
Desplazamiento vertical $\quad y = x^2 + 1$



Desplazamiento horizontal $y = (x-2)^2$



Combinado $y = (x-2)^2 + 1$



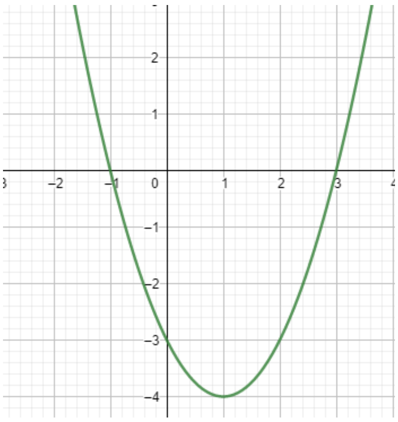
GENERALIZAR:

¿Cómo se obtiene un desplazamiento horizontal hacia la derecha? ¿y hacia izquierda?

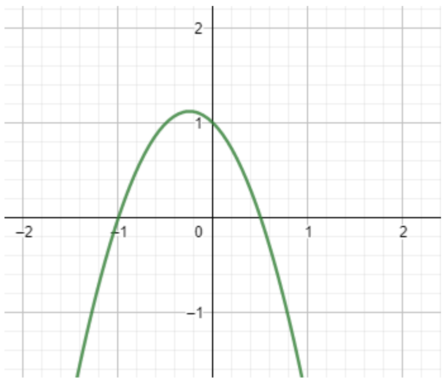
¿Cómo se obtiene un desplazamiento vertical hacia arriba? ¿y hacia abajo?

FORMA FACTORIZADA $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$y = (x-3)(x+1)$



$y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)$



Inmediatamente se detectan los puntos de corte con el eje horizontal, tanto como la concavidad, por lo que con una sencilla sustitución que permita calcular la intersección con el eje vertical, se puede construir la gráfica.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES:

Dada la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, la suma de sus raíces es $-\frac{b}{a}$ y el producto, $\frac{c}{a}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

CONCLUSIONES:

¿Cómo se distinguen las raíces en una función cuadrática en forma factorizada?

¿Toda función cuadrática puede expresarse así?

¿Para qué pueden servir las propiedades del recuadro?

Aplicación

Martín juega al básquet. En un entrenamiento, lanza la pelota de modo tal que sigue la trayectoria descripta por la función $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, donde x representa el tiempo en segundos y f(x) la altura en metros a la que se encuentra el balón.

¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
¿Al cabo de cuánto tiempo la pelota alcanzó su máxima altura?
Si nadie se interpone en su camino, ¿cuántos segundos se mantuvo la pelota en el aire?
¿Puede calcularse a qué altura fue realizado el lanzamiento? Justifique
Realice una representación gráfica de la situación.

TRABAJO PRÁCTICO

1) Para cada una de las siguientes funciones: graficar, identificar dominio, imagen, tipo de extremo, intersecciones con los ejes y concavidad
    a. $f(x) = 2x^2 - 3 + 5x$
    b. $g(x) = -5x^2 - 5 + 10x$
    c. $y = -2x^2 + 5x$
    d. $y = x^2 - 3x - 4$
    e. $y = -x^2 + 1$
2) Expresar cada una de las funciones anteriores en forma canónica y factorizada, cuando sea posible.
3) Determinar cuál es el desplazamiento que se realiza a la parábola $y = x^2$ para obtener:
    a. $y = (x - 2)^2 + 1$
    b. $y = (x + 1)^2 - 4$
    c. $y = (x - 3)^2 - 2$
    d. $y = (x + 1)^2 + 3$
4) Obtener la expresión polinómica de una función cuadrática que:
    a. Tiene por vértice el punto (1;2) y pasa por el punto (2; -2).
    b. Corta al eje de abscisas en $\{-1; 3\}$ y posee máximo en el punto (2; 4)
    c. Corta a los ejes: de ordenadas en – 1 y de abscisas en 1 y -3.
5) Escribir en forma polinómica a la función que represente al:

a. Área de un rectángulo cuya base sea el triple de la altura

b. Producto de dos números consecutivos

c. Volumen de una pirámide de base cuadrada la altura de 66 cm.

6) Una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + 1$, toma el valor 7 para x=-1 y para x=2. Determine esa función.

7) Sea la función $f(x) = x^2 + mx + m$, determine m sabiendo que la gráfica pasa por el punto (2;7)

8) Sea la función $f(x) = x^2 + mx + n$, determine m y n sabiendo que la gráfica pasa por los puntos (1;0) y (-3;4)

9) Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine a, b y c sabiendo que la gráfica pasa por los puntos (1;0), (0;0) y (-1;2).

10) Determinar a y c reales para que la gráfica de la función $f(x) = a x^2 + c$ pase por los puntos A(-1; -3) y B(3, 0)

11) Determinar el valor de $m \in R$ para que $x^2 + 3mx + m = 0$ tenga:

   a. una raíz doble
   b. una raíz cero
   c. una raíz sea 1 y la otra -0,25
   d. una raíz sea $m + 1$

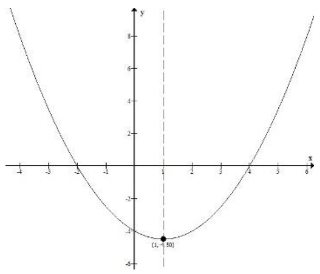
12) Halla las coordenadas de los vértices y los puntos de intersección con los ejes para cada una:

   a. $p(x) = (x + 8)^2$
   b. $q(x) = (x - 1)^2 - 4$
   c. $r(x) = x^2 + 5$
   d. $s(x) = 2(x - 1)(x - 3)$

13) Determinar la fórmula de la función cuadrática que respecto de $y = x^2$ se desplaza:

   a. tres unidades hacia abajo
   b. cuatro unidades hacia la derecha
   c. tres unidades hacia la derecha y dos hacia arriba
   d. una unidad hacia la izquierda y tres hacia arriba
   e. media unidad hacia la izquierda y tres cuartos hacia abajo

14) Mirando el gráfico indique la concavidad, las intersecciones con los ejes, el eje de simetría, el tipo de extremo y las coordenadas del mismo:



15) Calcular las raíces, ordenada al origen, eje de simetría y vértice de cada una de las siguientes funciones. Graficarlas y marcar en el gráfico los elementos anteriormente mencionados. Clasificar al extremo.

a. $y = x^2 - x - 2$
b. $b(x) = -2x^2 + 2x + 4$
c. $c(x) = x^2 + 2x + 1$
d. $y = x^2 + 2x + 3$
e. $e(x) = -6 + 2x^2 - 4x$
f. $y = x^2 + 5x + 6$
g. $l(x) = x^2 - 2x + 3$
h. $m(x) = x^2$
i. $y = x^2 - 3x - 1$
j. $y = 9x^2 + 6x + 1$
k. $y = x^2 - x + 2$
l. $y = -x^2 + 2$

16) Problemas

a) En una fábrica de autopartes se representa la producción en función del precio de venta (en dólares) de un producto por la función $p(x) = -5x^2 + 20x$. Si p(x) es la cantidad de producto y x es el precio de venta, ¿cuál debe ser el valor de x para que la producción sea la máxima posible? ¿Cuál será el valor de ese máximo?
b) Un organizador de eventos ha fijado el precio x de la entrada general para un concierto, teniendo en cuenta que el dinero recaudado i dependerá de la cantidad de entradas que vendan, a través de la siguiente función $i(x) = -4x^2 + 4000x$
¿Cuál debe ser el precio de la entrada general de modo que permita obtener el máximo ingreso?
¿Cuál es el ingreso máximo que se podrá recaudar?
c) Un proyectil se dispara desde un acantilado ubicado a 200 metros sobre el nivel del mar, de modo que su altura queda determinada por la función $h(t) = x - \frac{32x^2}{(50)^2} + 200$, donde x es la distancia horizontal del proyectil a la base del acantilado. Calcula aproximando a los décimos:
La altura máxima alcanzada por el proyectil
La distancia horizontal desde la base del acantilado hasta el punto de altura máxima del proyectil.
d) Los árboles del pueblo fueron atacados por un hongo. Al cabo de un tiempo, los técnicos de control de plagas encontraron que la cantidad de árboles infectados podía describirse, en forma aproximada, a través de la función $N(t) = -2t^2 + 20t + 2000$, donde N es la cantidad de árboles afectados y t es la cantidad de días transcurridos desde el inicio de la plaga. ¿Es cierto que la plaga se extinguirá pasado algún tiempo?

e) Una compañía de telefonía celular, de acuerdo con un estudio de mercado, sabe que el ingreso mensual de la empresa cuando la tarifa es de x pesos mensuales está dado por la función $f(x) = -600x \cdot (x - 300)$. ¿Cuál debe ser la tarifa mensual para que el ingreso sea máximo? ¿Cuál es ese ingreso? ¿A partir de qué tarifa mensual la empresa comienza a tener perdidas

f) Un jugador de béisbol batea una pelota en el aire, a 80 cm del suelo con una fuerza tal que la altura alcanzada por el balón puede expresarse en función de la distancia horizontal x recorrida mediante la fórmula $h(x) = -\frac{9{,}8}{512}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$. Realice un esquema de la situación y averigüe: a qué distancia del punto de bateo la pelota caerá al piso, a qué distancia de dicho punto alcanza su máxima altura y cuál es.

g) Los estudiantes de un colegio han organizado una campaña de reciclaje. Para ello, han gestionado la donación de planchas de cartón a fin de elaborar cajas para almacenar residuos. Cada caja debe tener un metro de altura y su base debe tener un perímetro de 2,4 metros. Si se desea almacenar la mayor cantidad de residuos

h) El promedio de la temperatura corporal T (en grados centígrados) de una persona durante cierta enfermedad viral está dada por la función $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, donde el tiempo t está medido en días. Dibuja un gráfico que muestre la evolución de la temperatura de la persona durante los 12 días que duró el proceso hasta que se curó. ¿Qué día la persona alcanzó su máxima temperatura?

Respuestas:

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
2. $m = 1$
3. $m = 1$ y $n = -2$
4. $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$
5. $a = \frac{3}{8}$ y $c = -\frac{27}{8}$
6. A) $m_1 = 0\,, m_2 = \frac{4}{9}$
   B) $m = 0$
   C) $m = -\frac{1}{4}$
   D) $m_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{9}\,, m_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{9}$
7. A) $V = (-8; 0)$
   B) $V = (1; -4)$
   C) $V = (0; 5)$
   D) $V = (2; -2)$
8. A) $y = x^2 - 3$
   B) $y = (x - 4)^2$
   C) $y = (x - 3)^2 + 2$
   D) $y = (x + 1)^2 + 3$
   E) $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

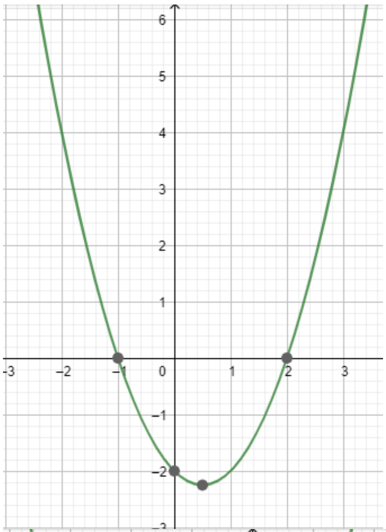
9. Concavidad positiva o hacia arriba
   Intersección con el eje x en -2 y 4
   Intersección con el eje y en -4
   Eje de simetría x=1
   Tipo de extremo: mínimo
   Vértice: (1;-4/5)

10. Elementos de las parábolas dadas

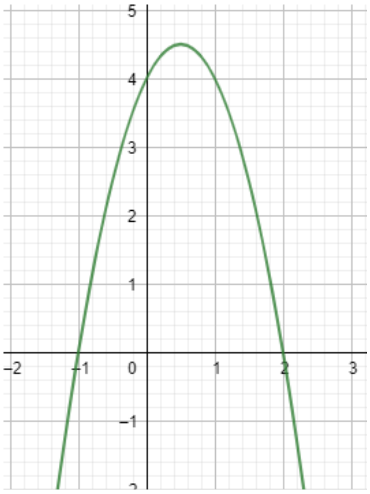
Raíces (y=0)	Ordenada al origen (x=0)	Eje de simetría	Vértice	Tipo de extremo
$a. \cap x = \{(2;0),(-1;0)\}$	$\cap y = (0;-2)$	$x = 0{,}5$	$V = \left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$	Mínimo
$b. \cap x = \{(2;0),(-1;0)\}$	$\cap y = (0;4)$	$x = 0{,}5$	$V = \left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$	Máximo
c. $\cap x = \{(-1;0)\}$	$\cap y = (0;1)$	$x = -1$	$V = (-1;0)$	Mínimo
d. $\cap x = \{\ \ \}$	$\cap y = (0;1)$	$x = -1$	$V = (-1;0)$	Mínimo
$e. \cap x = \{(3;0),(-1;0)\}$	$\cap y = (0;-6)$	$x = 1$	$V = (1;-8)$	Mínimo
f. $\cap x = \{(-3;0),(-2;0)\}$	$\cap y = (0;-2)$	$x = 0{,}5$	$V = \left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$	Mínimo
g. $\cap x = \{\ \ \}$	$\cap y = (0;3)$	$x = 1$	$V = (1;2)$	Mínimo
h. $\cap x = \{(0;0)\}$	$\cap y = (0;0)$	$x = 0$	$V = (0;0)$	Mínimo
$i. x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$	$\cap y = (0;-1)$	$x = 1{,}5$	$V = \left(\frac{3}{2};-\frac{13}{4}\right)$	Mínimo
j. $\cap x = \left\{(-\frac{1}{3};0)\right\}$	$\cap y = (0;1)$	$x = -\frac{1}{3}$	$V = \left(-\frac{1}{3};0\right)$	Mínimo
k. $\cap x = \{\ \ \}$	$\cap y = (0;2)$	$x = \frac{1}{2}$	$V = \left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$	Mínimo
$\cap x = \left\{(\sqrt{2};0),(-\sqrt{2};0)\right\}$	$\cap y = (0;2)$	$x = 0$	$V = (0;2)$	Máximo

Gráficos de algunas de ellas:

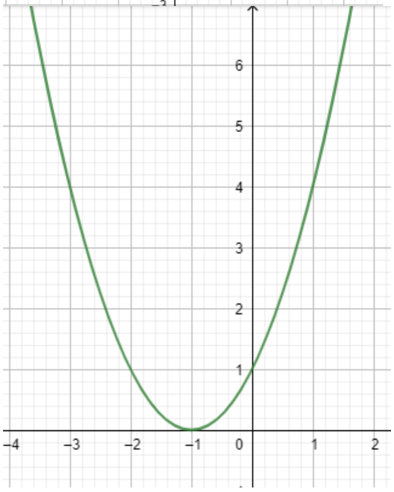
a.



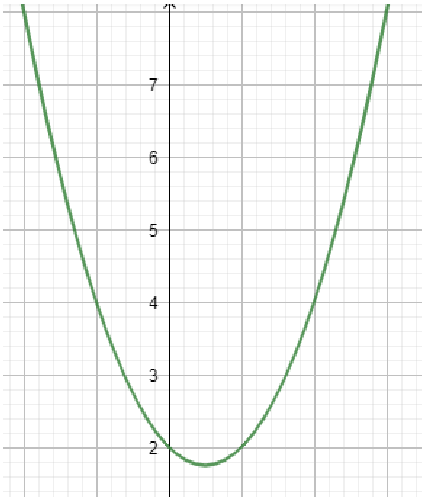
b.



c.



k.



11. Respuestas a los problemas
    a) El precio de venta debe ser de dos dólares, el valor del máximo es de veinte unidades.
    b) El precio de la entrada debe ser de $500, para recaudar un millón de pesos.
    c) La altura máxima alcanzada es de aproximadamente 219,53 metros a una distancia de 39,06 metros desde la base.
    d) La plaga se extinguirá, ya que en el día 37 dejan de haber árboles infectados.
    e) La tarifa mensual debe ser de $150 para que el ingreso sea máximo, de trece millones y medio de pesos. A partir de los $300 genera pérdida.
    f) A los 40 metros cae el piso, a los 19,59 m. alcanza 8,15 m. de alto, que es el máximo.
    g) La caja debe tener base cuadrada de 0,6 metros de lado para que el volumen se máximo.
    h) El sexto día la persona alcanzó la máxima temperatura.

POLINOMIOS

Un poco de historia…

La necesidad de trabajar con expresiones algebraicas tiene sus inicios hace unos 4.000 años, donde los babilonios ya conocían la manera de encontrar la solución positiva de ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Tenían una "receta" muy precisa para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - bx = c$, con $b > 0$, $c > 0$, aunque estos símbolos ($b, c, x, +, =$) no se usaban entonces. El trabajo de los babilonios constituyó un logro notable, teniendo en cuenta que no contaban con la notación moderna y por su alto nivel de abstracción, al considerar las ecuaciones cuárticas como ecuaciones cuadráticas “disfrazadas” y resolverlas como tales.

Después de un siglo de expansión en la que la religión musulmana se difundió desde sus orígenes en la península Arábiga hasta dominar un territorio que se extendía desde la península Ibérica hasta los límites de la actual China, los árabes empezaron a incorporar a su propia ciencia los resultados de "ciencias extranjeras".

Hacia el año 900, el periodo de incorporación se había completado y los estudiosos musulmanes comenzaron a construir sobre los conocimientos adquiridos. Entre otros avances, los matemáticos árabes ampliaron el sistema indio de posiciones decimales en aritmética de números enteros, extendiéndolo a las fracciones decimales. En el siglo XII, el matemático persa Omar Jayyam generalizó los métodos indios de extracción de raíces cuadradas y cúbicas para calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior. El matemático árabe Al-Jwârizmî (de su nombre procede la palabra algoritmo, y el título de uno de sus libros es el origen de la palabra álgebra) desarrolló el álgebra de los polinomios; al-Karayi la completó para polinomios incluso con infinito número de términos.

Más adelante, matemáticos griegos, hindúes, árabes y europeos se dedicaron al estudio de estas ecuaciones y lograron avanzar a través del tiempo hasta encontrar la fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado, es decir, una ecuación de la forma, $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c pueden ser números cualesquiera. En tanto que la fórmula que permite encontrar las soluciones de cualquier ecuación de tercer grado (o ecuación cúbica) no se encontró sino hasta el siglo XVI en Italia.

Por muchos siglos, antes del siglo XVI, los matemáticos intentaron encontrar la fórmula que sirviera para determinar las soluciones de cualquier ecuación cúbica, sin lograrlo. La gran proeza matemática de descubrir la fórmula, fue realizada por el matemático italiano Scipione del Ferro, en primer lugar, y más adelante por Nicoló Tartaglia quien la obtuvo por su cuenta, sin conocer el trabajo de Scipione del Ferro. Sin embargo, la fórmula es conocida con el nombre de "fórmula de Cardano", porque otro matemático llamado Girolamo Cardano, quien estudió cuidadosamente las soluciones de Tartaglia y del Ferro, luego fue quien publicó la fórmula por primera vez en un gran tratado sobre resolución de ecuaciones titulado "Ars Magna".

El desarrollo del Álgebra a través de la historia ha sido impulsado principalmente por el interés en resolver ecuaciones. Ecuaciones lineales o de grado 1 (del tipo $ax + b = 0$), ecuaciones cuadráticas o de grado 2 (del tipo $ax^2 + bx + c = 0$), ecuaciones cúbicas o de grado 3 (del tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) y ecuaciones de cualquier grado, en general.

Este hallazgo llevó a los matemáticos a interesarse por los números complejos y estimuló la búsqueda de soluciones similares para ecuaciones de quinto grado y superior. Fue esta búsqueda la que a su vez generó los primeros trabajos sobre la teoría de grupos hacia fines del siglo XVIII y la teoría de ecuaciones del matemático francés Évariste Galois a principios del siglo XIX.

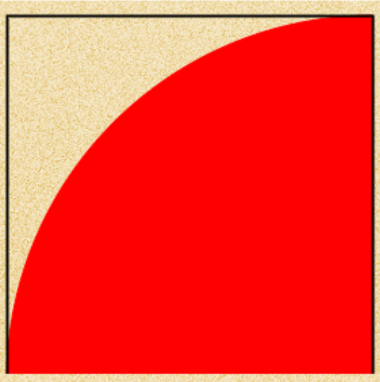
También durante el siglo XVI se empezaron a utilizar los modernos signos matemáticos y algebraicos. El matemático francés François Viète llevó a cabo importantes estudios sobre la resolución de ecuaciones. Sus escritos ejercieron gran influencia en muchos matemáticos del siglo posterior, incluyendo a Pierre de Fermat en Francia e Isaac Newton en Inglaterra.

El estudio de polinomios, y en concreto, la obtención de sus raíces, se aplica en numerosos campos y, aunque son objetos sencillos de describir, muchos investigadores en todo el mundo trabajan en su cómputo. Podemos encontrar las raíces de polinomios en las teclas de un piano. Al pulsar una tecla se activa un martillo que golpea una cuerda que vibra a determinada frecuencia (velocidad), que es la que define la nota. Esta frecuencia es un número, y, de hecho, es la raíz de un polinomio que se define a partir de las características de la cuerda. Esto mismo sucede en cualquier instrumento, y a cualquier objeto que vibra.

Otra aplicación muy común es la optimización. Esta técnica matemática permite usar de forma eficiente recursos escasos como el tiempo, la energía o el dinero, siguiendo determinados objetivos. Las compañías la emplean, por ejemplo, para decidir si es mejor gastar más dinero en contratar más empleados, remodelar la oficina, comprar más productos que luego se vayan a vender, o dejarlo en el banco. Para poder establecer la estrategia óptima se resuelven, con ayuda de un ordenador, una serie de ecuaciones que reflejan cuanta inversión y cuanto beneficio se asocia a cada acción. Las estrategias óptimas se corresponden habitualmente con las raíces de las ecuaciones escritas. En síntesis, resulta imprescindible conocer el trabajo con polinomios.

Para pensar y resolver…

Lea y observe atentamente las siguientes figuras y decida qué opción es la correcta. En cada polinomio respuesta aplique los conceptos del diagrama teórico (coeficiente principal, grado, etc). Calcule el valor numérico de los polinomios cuando $x = 10$.

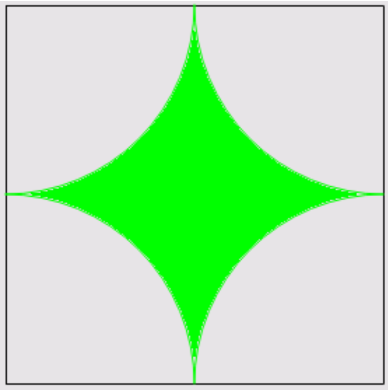


a πx^2 b $\frac{\pi}{2} x^2$

c $\frac{\pi}{4} x^2$ d $2\pi x^2$

El lado del cuadrado mide x.

¿Cuál es la expresión polinómica que representa el área sombreada?

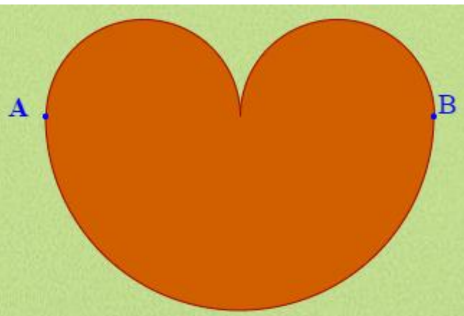


a $4x^2 - \pi x^2$ b $\pi x^2 - 2x^2$

c $\pi x^2 - x^2$ d $2x^2 - \pi x^2$

El lado del cuadrado mide 2x.

¿Cuál es el valor del área sombreada?

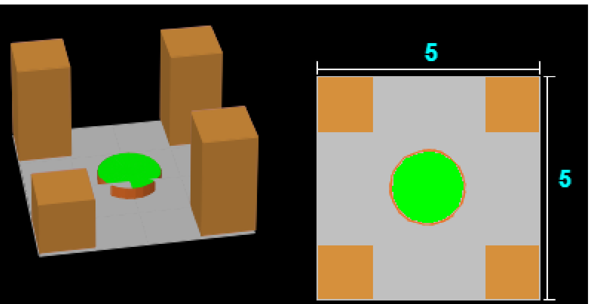


a $\frac{27}{4} \pi x^2$ b $\frac{21}{4} \pi x^2$

c $\frac{25}{4} \pi x^2$ d $\frac{9}{4} \pi x^2$

La distancia entre los puntos A y B es 6 x.

¿Cuál es el valor del área que forma un corazón?



a $25 - 144x^2 - 9\pi x^2$

b $25 - 144x^2 - 36\pi x^2$

c $25 - 72x^2 - 3\pi x^2$

d $25 - 288x^2 - 6\pi x^2$

Encuentra el área total de pavimento, conociendo los siguientes datos:

El lado de los cuadrados de las esquinas es igual a 6 x. El radio de la rotonda es 3x

EJERCITACIÓN

Ej. 1. Dados los polinomios:

$A(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$ $\quad B(x) = x^3 - 3x^5 + 6x^4 + x - 2$ $\quad C(x) = \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x + \frac{1}{2}$

$D(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$ $\quad E(x) = x - \frac{1}{2}$ $\quad F(x) = x + 3$ $\quad G(x) = 5x - 10$

Resolver las operaciones indicadas:

a) A(x) + B(x) – C(x) =
b) B(x) . D(x) =
c) C(x) . D(x) + A(x) . E(x) =
d) [F(x) . G(x) + D(x)] : D(x) =
e) B(x) : A(x) =
f) C(x) : E(x) = } 1º) por Ruffini y 2º) calcular directamente el resto
g) A(x) : F(x) =
h) A(x) : G(x) =

Ej. 2. Calcular por Ruffini el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4) : (x + 1)\ (x - 2) =$
b) $(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}) : (x - \frac{1}{2})\ (x + 3) =$

Ej. 3. Aplicar el algoritmo de la división para hallar un polinomio que dividido por

$x^2 - 2$ dé como cociente $x + 1$ y resto 8 .

Ej. 4. Al dividir $x^3 + 2ax^2 - 2 + a$ por $x – 1$ la división es exacta. ¿Cuánto debe valer a?

Ej. 5. Se sabe que $– 1$ es raíz del polinomio : $3x^3 + k x^2 - 3x – 6$, determinar el valor de $k \in R$ que lo verifique.

Ej. 6. Determinar a, b y c reales para que el polinomio $a x^2 + b x + c$ tenga como raíces 0 y $– 2$.

Ej. 7. Del polinomio $P(x) = k x^2 + k x – 2$, se sabe que $P(- 1) = - 2$ y $gr [P(x)] = 2$, determinar $k \in R$ que cumpla las condiciones dadas.

Ej. 8. Los polinomios $P(x)=a x^2 + 8x – b$ y $Q(x)=a x^3 + 9 b$ tienen a $- 3$ por raíz común, determinar los valores reales de a y b que lo verifiquen.

Ej. 9. Factorizar las siguientes expresiones:

a) $x^4 + 6x^2 + 9 =$ $\quad$ b) $5x^2 - 10x - 15 =$ $\quad$ c) $4x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{9} =$

d) $x^3 + 5x^2 - x - 5 =$ $\quad$ e) $9x^2 - 4y^4 =$ $\quad$ f) $x^6 - a^6 =$

g) $x^6 - 729 =$ $\quad$ h) $x^5 + 32 =$ $\quad$ i) $x^8 - 16 =$

j) $x^4+3x^2+2=$ k) $\frac{1}{4}x^2+4y^2-2xy=$ l) $16x^2-\frac{1}{4}y^2=$

m) $(x+y)^2-10(x+y)+25=$ n) x^3+3x^2+3x+9

Respuestas trabajo sobre polinomios

1	a) $-3x^5+\frac{31}{3}x^4+\frac{1}{2}x^3-6x^2+2x+\frac{1}{2}$ b) $-3x^7+3x^6+\frac{17}{2}x^5-2x^4+\frac{1}{2}x^3-x^2-\frac{5}{2}x+1$ c) $\frac{2}{3}x^6+\frac{37}{6}x^5-\frac{7}{3}x^4-\frac{29}{4}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x-\frac{7}{4}$ d) cociente : 6 y resto: $-\frac{55}{2}$; e) cociente: $-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}$ y resto: $-\frac{13}{5}x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{14}{5}x-\frac{28}{5}$ f) cociente: $\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^2+\frac{5}{12}x-\frac{19}{24}$ y resto: $\frac{5}{48}$ g) cociente: $5x^3-15x^2+39x-117$ resto: 354 h) cociente $x^3+2x^2+\frac{14}{5}x+\frac{28}{5}$ y resto: 59
2	a) cociente: $2x^2+2$ y resto 0; b) cociente: $x+1$ y resto: – 2
3	$P(x) = x^3+x^2-2x+6$
4	$a = \frac{1}{3}$
5	k = 6
6	c = 0, b = 2a ; $\forall a, \forall b \in \Re - \{0\}$
7	$\forall k \in \Re$
8	a = 4 ^ b = 12
9	a) $(x^2+3)^2$; b) $5(x+1)(x-3)$; c) $4\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$; d) $(x-1)(x+1)(x+5)$; e) $(3x-2y^2)(3x+2y^2)$; f) $(x-a)(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)$ g) $(x-3)(x^5+3x^4+9x^3+27x^2+8x+243)$; h) $(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$ i) $(x^2-2)(x^6+2x^4+4x^2+8)$; j) $(x^2+1)(x^2+2)$; k) $\frac{1}{4}(x-4y)^2$; l) $\frac{1}{4}(8x-y)(8x+y)$ m) $(x+y-5)^2$; n) $(x+3)(x^2+3)$

GEOMETRÍA

Historia de la Geometría

En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

Geometría demostrativa primitiva

La geometría como palabra tiene dos raíces griegas:

geo = tierra y **metrein** = medida; o sea, significa **"medida de la tierra".**

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como medir predios agrarios y en la construcción de pirámides y monumentos. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración, era producto de la práctica.

Por lo tanto este tipo de geometría es llamada......................., el cual floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia. Dicho estudio fue refinado y sistematizado por los ....

Dichos conocimientos pasaron a los griegos y fue Thales de Mileto quien hace unos 6 siglos antes de Cristo inició la geometría demostrativa. Las propiedades se demuestran por medio de razonamientos y no porque resulten en la práctica.
Las demostraciones pasan a ser fundamentales y son la base de la Lógica como leyes del razonamiento.

Euclides fue otro gran matemático griego, del siglo III antes de Cristo, quien en su famosa obra titulada "Los Elementos", recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría hasta su época y, salvo algunas pequeñas variaciones, son los mismos conocimientos que se siguen enseñando en nuestros días.

Euclides, usando un razonamiento deductivo parte de conceptos básicos primarios no demostrables tales como ....,....... y ....los cuales son el punto de partida de sus definiciones.
Razón por la cual resulta necesario definir:
AXIOMA:

POSTULADO:

Demuestra teoremas y a su vez, éstos servirán para demostrar otros teoremas. Crea nuevos conocimientos a partir de otros ya existentes por medio de cadenas deductivas de razonamiento lógico. Esta geometría recibe el nombre de geometría euclidiana.

A partir de lo expresado anteriormente te proponemos:
a) Investiga algunos datos significativos de los geómetras destacados a lo largo de la historia
b) Ubícalos en una línea del tiempo.

Dato interesante

- Las primeras investigaciones conocidas de la geometría son debidas a los Egipcios y a los Babilonios (2000 años antes de nuestra era.)

Las inundaciones periódicas del Nilo obligaban a los agrimensores egipcios a rehacer cada año el trazo de las propiedades. **L**as fórmulas utilizadas eran empíricas: Así el área de un cuadrilátero de lados a, b, c, d estaba dada por

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{d+b}{2}\right)$$

Este último resultado no era de hecho más que una aproximación. La fórmula llegaba a ser exacta para un rectángulo. Del mismo modo el área de un triángulo isósceles de lados a y b estaba dada por

$$\left(\frac{a\cdot b}{2}\right)$$

Fórmula que es falsa en todos los casos pero llega a ser una bastante buena aproximación si el triángulo isósceles tiene un ángulo muy agudo.

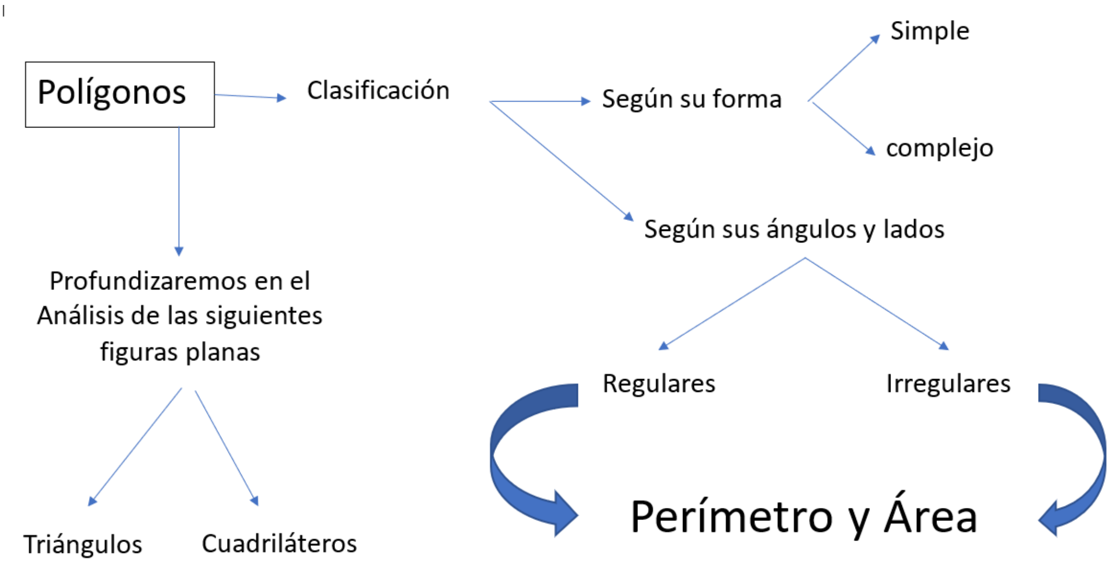
- **E**stas informaciones provienen de un papiro, llamado papiro de Rhind (manual de cálculo del escriba Ahmès) que data de 1700 a 2000 años antes de nuestra era.
- **S**in embargo se ha constatado que los Egipcios conocían el volumen del tronco de pirámide y la superficie de la esfera.

Se han encontrado también sobre tablillas babilonias (2000 antes de nuestra era) una serie de problemas referentes a la resolución de ecuaciones de segundo grado e incluso de ecuaciones bicuadradas.

Geometría analítica

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado "El Discurso del Método", publicado en 1637, hizo época. Este trabajo realizó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

POLÍGONOS



Un polígono es una figura **plana** con lados rectos.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

Los polígonos se clasifican según su forma, según el número de sus **lados**, y según la medida de sus **lados** y **ángulos** internos.
Según su forma los polígonos pueden ser **convexos** y **cóncavos**

Se denominan polígonos convexos a aquellos que………………………………………......................
....
....
Llamamos polígonos cóncavos a aquellos que al menos tienen
.....................…………..........
....
....

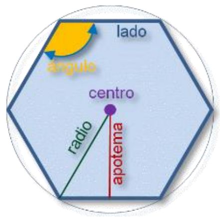
Un polígono **simple** sólo tiene un borde que no se cruza con él mismo.

¡Uno **complejo** se interseca consigo mismo!

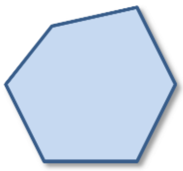
Consigna:
Se te pide dibujar un ejemplo de cada uno de los polígonos mencionados anteriormente.

Polígonos regulares e irregulares

Si todos sus ángulos y lados son iguales el polígono es regular. Lo contrario es irregular.



Polígono regular



Polígono irregular

Elementos de un polígono regular (Define cada uno)

- **Centro**:
  ………………………………………………………………………………………………………
- **Radio**:
  ………………………………………………………………………………………………………
  …….
- **Apotema**:
  ………………………………………………………………………………………………………

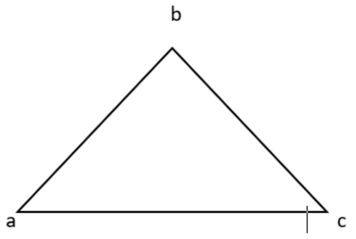
Dibujar cada uno de los polígonos regulares que figura en la tabla y decir cuál es el valor del ángulo central de cada uno.

Lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono

Utilizando los saberes previos… Recordando triángulos…

Elementos del triángulo

Dado el triángulo abc



¿Cuáles son los vértices?

a) ¿Cuáles son los lados?
b) Señala con un arco los ángulos interiores del triángulo. Nómbralos......................
c) Marca las semirrectas $\overrightarrow{ac}$, $\overrightarrow{cb}$, y $\overrightarrow{ba}$. Señala con otro color los ángulos adyacentes a cada uno de los ángulos interiores. Nómbralos α (adyacente a a) β (adyacente a b) y δ (adyacente a c).

α , β y δ son ángulos exteriores del triángulo.

Completa teniendo en cuenta que son adyacentes

$\hat{\delta}+\hat{c}=$.......... $\hat{\alpha}+\hat{a}=$.......... $\hat{\beta}+\hat{b}=$..........

Clasificación de triángulos

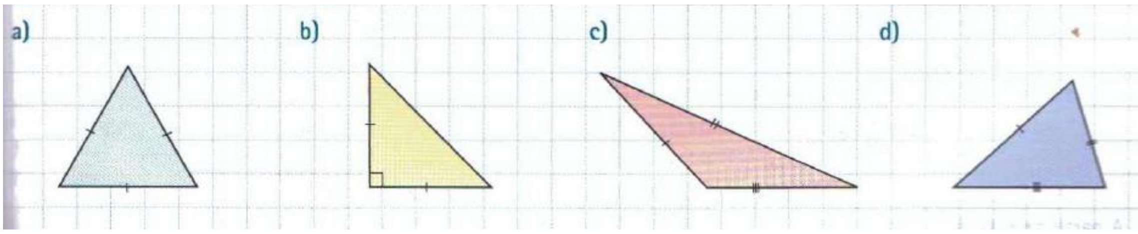
Según sus ángulos

ACUTANGULO	RECTANGULO	OBTUSANGULO
Tiene sus tres ángulos......	Tiene un ángulo..............	Tiene un ángulo............. ....

Según sus lados

ESCALENO	EQUILATERO	ISOSCELES
Tiene sus tres lados......	Tiene sus tres lados..............	Tiene dos lados ....

Clasificar los triángulos según sus lados y según sus ángulos



Definiendo al cuadrilátero

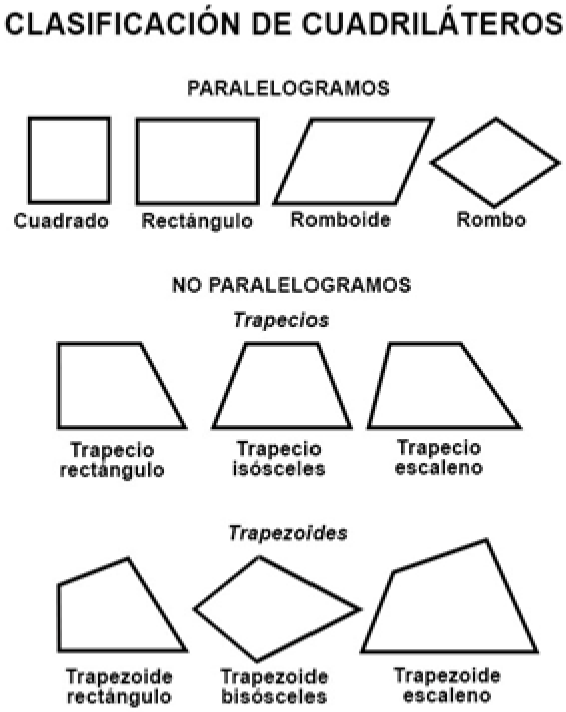
Si analizamos su nombre “cuadrilátero” podemos entender a qué se refiere. El prefijo “cuad-” significa “cuatro,” y “latero” se deriva de la palabra Latina “lado.” Entonces un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Elementos del cuadrilátero

En un **cuadrilátero** se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:

- **Vértices** (*V*): puntos en los que confluyen dos lados. Tiene 4 vértices.

- **Lados** (*L*): segmentos que unen dos vértices consecutivos del cuadrilátero y que delimitan su perímetro. Tiene 4 lados.
- **Diagonal** (*D*): segmento que une dos vértices no consecutivos. En un cuadrilátero convexo hay 2 diagonales (¿por qué hay dos diagonales?).
- **Ángulos interiores** (α): ángulo que forman dos lados consecutivos en el vértice en el que confluyen. Hay 4 ángulos interiores. Los ángulos interiores del cuadrilátero suman 360º (¿por qué suman 360º?).
- **Ángulos exteriores** (β): ángulo formado por un lado con la prolongación exterior del lado consecutivo. Hay 4 ángulos exteriores.
- **Altura:……………………………………………………………………………..(definir)**
- **Base:……………………………………………………………………………….(definir)**
- **(Colocar todos estos elementos en la figura superior).**



DEFINIR

PARALELOGRAMOS NO PARALELOGRAMOS

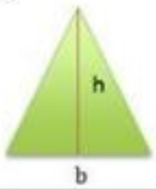
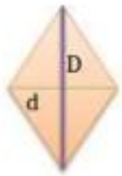
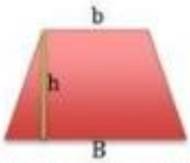
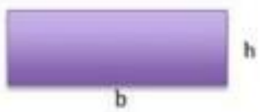
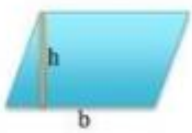
……………………………………………………………………….
………………………………………………………
..…………………………………………………………………

………………………………………………………
……………………………………………………………………….

……………………………………………………..
………………………………………………………………………..

……………………………………………………..
…………………………………………………………………………

Leer atentamente y formalizar según las características

Figura geométrica	Perímetro	Área
Cuadrado 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l) o multiplicando el valor de uno de sus lados por 4.	Se obtiene multiplicando el valor de uno de sus lados(l) por otro de sus lado.
Triángulo 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l).	Se obtiene multiplicando el valor de la base(b) por la altura(h) y dividiéndola entre dos.
Rombo 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l).	Se obtiene multiplicando la diagonal mayor(D) por la diagonal menor(d) y dividiéndola entre dos.
Trapecio 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l).	Se obtiene sumando la base mayor(B) más la base menor(b) dividido entre dos y multiplicarlo por la altura(h)
Polígono regular (Pentágono) 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l).	Se obtiene multiplicando el perímetro(p) por la apotema(a) y dividiéndola entre dos.
Rectángulo 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l).	Se obtiene multiplicando la base(b) por la altura(h)
Paralelogramo 	Se obtiene sumando cada uno de sus lados(l).	Se obtiene multiplicando la base(b) por la altura(h)

Aplicaciones

1. Santiago está preparando su puesto para la feria de ciencias que se realizará en su escuela. Ha decidido poner como fachada una plancha de acrílico rectangular con un cuadrado cortado en el centro para atender a la gente. El lado menor mide 4m y el mayor

el cuádruple de la mitad del otro. El perímetro del rectángulo es el doble del perímetro del cuadrado.
a) Si quiere pegar una cinta alrededor del contorno de la fachada. ¿cuántos metros de cinta necesitará?
b) ¿Cuántos m2 de acrílico utilizará para armar el frente?

a) Rta: 36 m b) Rta: 3 m^2

2. La familia López compro un terreno para llevar a cabo el siguiente proyecto: Las 2/5 partes del terreno están destinadas para la construcción de la casa; 1/6 parte del resto será para la pileta de natación y los 270 mt2 restantes estarán destinadas al parque.
a. ¿Qué parte del terreno representa el parque?
b. ¿Cuántos mt2 tiene el terreno?
c. ¿Cuántos mt2 ocupa la casa? ¿Y la pileta?

Rta.:
a) 1/2 b) 540m^2 c) 216 m^2 pileta: 54 m^2

3. En un balneario, sobre la rambla se colocan postes cada 300m indicando las paradas de los colectivos.

a) Si la rambla tiene 12 km de longitud y su ancho es de 3mt. Se quiere colocar baldosones de 2x1,5 m2. ¿Cuántos se necesitarán para cubrir toda la rambla?
b) Se quiere poner tachos de basura a lo largo de la rambla, si se coloca uno cada 2m, ¿cuántos tachos se necesitan?
c) ¿A qué distancia estarán dos tachos consecutivos si la distancia entre ellos es siempre la misma?

Rta.:

a) 12000 baldozones b) 6000 tachos c) 2m

Ejercitación

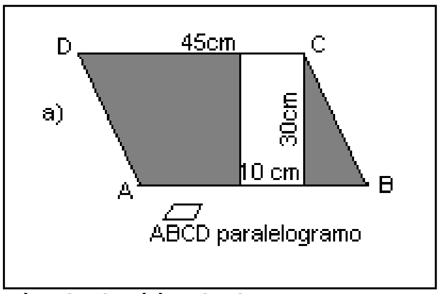
1. La suma de los ángulos interiores de un polígono regular es de 900º ¿De qué polígono se trata? ¿Cuánto mide cada ángulo interior del polígono?

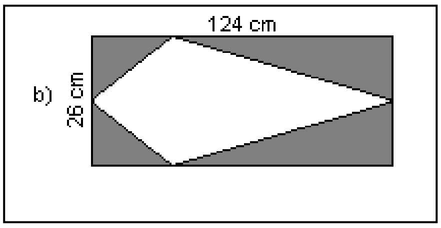
   Rta.: heptaedro, 128° 34’17’’

2. El perímetro de un romboide es de 32 cm si sus lados no consecutivos están dados por $l_1 = \frac{2}{3}p + 5cm$ y $l_2 = p - 4cm$ ¿Cuál es la medida de cada lado?

Rta.: l_1= 11 cm y l_2= 5 cm.

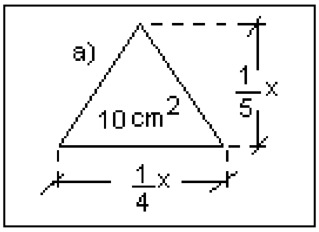
3. Hallar el área sombreada

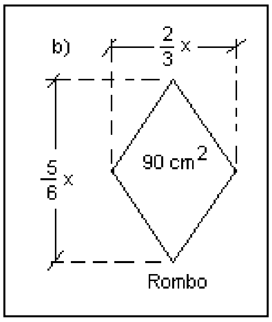


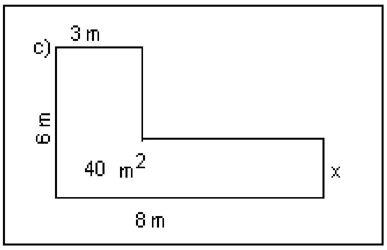


Rta.: a) 1050   b) 1612

4. Hallar "x"

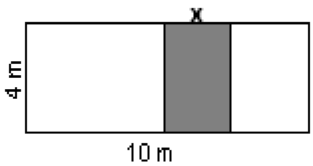






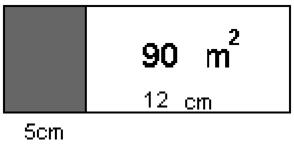
Rta.: a) x = 20cm.   b) x = 18 cm. c) x = 4,4 m.

5. El área de la franja central es $\frac{2}{5}$ del área del rectángulo. Calcular "x".



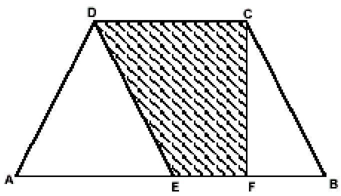
Rta.: 4 m.

6. Calcular la superficie de la parte sombreada.



Rta.: 37,5 cm^2

7. En la figura ΔAED es equilátero, EBCD es rombo. CF ⊥ AB   DC = 4 cm.
Entonces el área de la región sombreada es:



A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

8. Construir un triángulo cuyos lados miden 10cm, 8cm y 7 cm

9. Construir un paralelogramo si dos lados contiguos miden 4cm y 6 cm y el ángulo comprendido es de 30º

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Triángulos rectángulos

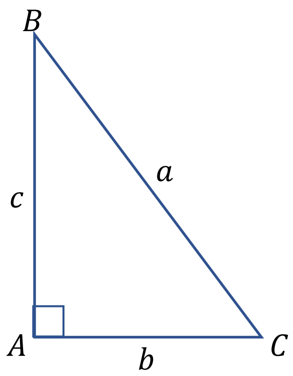
Un triángulo rectángulo es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa** y los lados restantes se denominan **catetos**.

En el triángulo rectángulo BAC:

$a \rightarrow$ Hipotenusa

$b \rightarrow$ Cateto

$c \rightarrow$ Cateto



2. Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras enuncia que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

En el triángulo de la figura anterior:

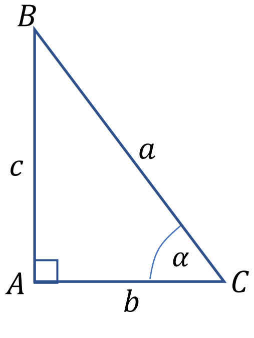
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3. Razones trigonométricas

Dado cualquier triángulo rectángulo BAC, se pueden considerar las siguientes razones entre los lados del mismo:

$$\frac{c}{a} \qquad \frac{b}{a} \qquad \frac{c}{b}$$

Las razones anteriores, no dependen de la longitud de los lados, sino de la medida del ángulo y reciben el nombre de **razones trigonométricas**.



Definición: Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo BAC, como el dado en la figura, se definen de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo\ \alpha}{hipotenusa} \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente\ al\ ángulo\ \alpha}{hipotenusa} \quad \rightarrow \quad cos\ \alpha = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo\ \alpha}{cateto\ adyacente\ al\ ángulo\ \alpha} \quad \rightarrow \quad tg\ \alpha = \frac{c}{b}$$

Nota 1: Si bien existen otras tres razones trigonométricas, recíprocas de las anteriores, no se tratarán en este módulo.

Nota 2: Observe que tanto el seno como el coseno son relaciones entre un cateto y la hipotenusa, en tanto que la tangente es una relación entre catetos.

4. Valores exactos de las razones trigonométricas de ángulos particulares

La siguiente tabla muestra los valores correspondientes a las razones trigonométricas de ángulo particulares comprendidos entre $0°$ y $90°$:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sen\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$No\ definida$

5. Resolución de triángulos

Cada triángulo está constituido por tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo, significa determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos.

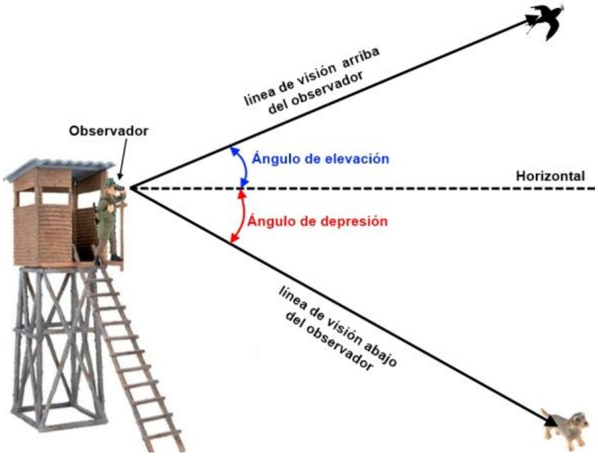
Para resolver triángulos rectángulos se aplican: el Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

6. Ángulos de elevación y de depresión

Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión**. Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**.

Si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**.

En la figura siguiente se pueden apreciar los mencionados ángulos:

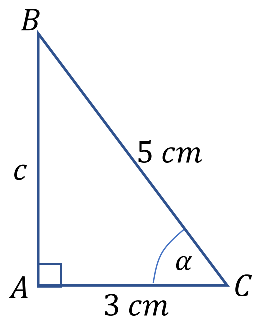


Los ángulos de elevación y de depresión se darán para un observador hipotético al nivel del suelo.

<u>Ejercicios</u>

1. Se sabe que la diagonal de un cuadrado mide $8\ cm$. ¿Cuál es la longitud del lado?.

2. Encuentre la longitud del lado restante y el valor exacto de cada una de las tres razones trigonométricas para el ángulo indicado en la figura:



3. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, tal que $\overline{AB} = 4\ cm$ y $\overline{AC} = 6\ cm$. Realice un esquema de la situación y calcule: $cos\ \hat{B}$, $sen\ \hat{B}$, $tg\ \hat{B}$, $cos\ \hat{C}$, $sen\ \hat{C}$ y $tg\ \hat{C}$.

4. Calcular el perímetro y el área del triángulo isósceles ABC en el que se sabe que: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = 24\ cm$ y $h = 5cm$ es la altura correspondiente al vértice B. Encuentre la medida de los ángulos interiores del triángulo.

Respuestas a los ejercicios:

1. Longitud del lado del cuadrado: $4\sqrt{2}\ cm$.
2. $c = 4\ cm$; $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$; $cos\ \alpha = \frac{3}{5}$; $tg\ \alpha = \frac{4}{3}$
3. $cos\ \hat{B} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $sen\ \hat{B} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $tg\ \hat{B} = \frac{3}{2}$, $cos\ \hat{C} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $sen\ \hat{C} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ y $tg\ \hat{C} = \frac{2}{3}$.
4. Perímetro: $50\ cm$; $\hat{A} = \hat{C} = 22{,}62°$; $\hat{B} = 134{,}76°$.

Tres problemas…

1. Pablo debe colocar una cuerda desde el punto donde termina el tronco de una pequeña palmera que se encuentra en un parque y el suelo, a fin de protegerla del viento.

   Pablo midió la altura del tronco (desde el suelo hasta el punto donde se ramifica) y obtuvo como resultado $1{,}32\ m$, por otra parte midió la longitud de la sombra del mismo que es de $2\ m$.

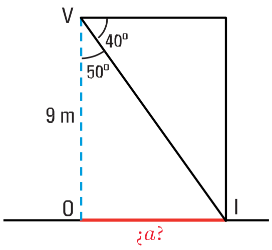
   

   a. ¿Cuál es el ángulo que forma el rayo de sol que pasa justamente por el punto donde termina el tronco (comienza el follaje) y la superficie de césped?;
   b. ¿Qué propiedad permite relacionar la altura del tronco de la palmera con la medida de su sombra?

   A partir de esta relación: ¿cuál es longitud de la cuerda que se debe atar a la palmera para que la misma no sufra los embates de los vientos?

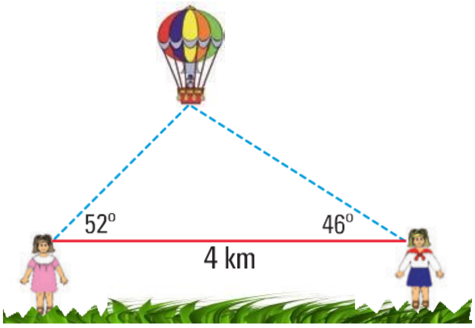
2. Silvina se encuentra en la ventana de su departamento que está situado a $9\ m$ del suelo y observa la parte inferior del edificio con un ángulo de depresión de $40°$.

   ¿Cuál es el ancho de la calle que divide el edificio donde vive Silvina y el edificio de enfrente?



3. Virginia y Julia observan un globo aerostático. La distancia entre ellas es de $4\ km$, pero mientras Virginia observa el globo con un ángulo de elevación de $46°$, Julia lo hace con un ángulo de elevación de $52°$.

a. ¿Cuál es la altura del globo aerostático en el momento de la observación?



b. ¿Qué distancia hay desde el globo al punto sobre la superficie de la tierra donde se encuentra ubicada Virginia? ¿Y dónde se encuentra Julia?

<u>Respuestas a los problemas</u>:

1. $\alpha = 33°25'29''$, Hipotenusa: $2{,}396\ m$.
2. Ancho: $10{,}73\ m$.
3. Altura del globo: $2{,}29\ km$; Distancia de Virginia: $2{,}91\ km$ y de Julia: $3{,}18\ km$.

Bibliografía: Inet. MEN 2010.Funciones trigonométricas (pág 186-9)

Autoevaluación: Actividad obligatoria.

Entrega: fecha:…../……/2020

De resolución individual y domiciliaria.

Resolver en forma ordenada y prolija.

Kandinsky, pintor ruso, precursor del arte abstracto.

Nombre y Apellido:……………………………………………………

Comisión:……………………………...

Indica V verdadero o F falso.

Justifica la respuesta: resolviendo o definiendo según sea necesario.

1. La función que relaciona un ángulo con los dos catetos es el coseno.
2. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son suplementarios.
3. La tangente de un ángulo es igual al cateto opuesto dividido por la hipotenusa.
4. La tangente de un ángulo de 45º es igual a 1.
5. El coseno de un ángulo es siempre menor o igual que 1.
6. El coseno de un ángulo dividido por el seno es la tangente.
7. La diagonal de un cuadrado de lado 1, es $\sqrt{2}$.
8. El seno de un ángulo varía entre -∞ $y + \infty$.
9. La altura de un triángulo equilátero es igual al lado L por la $\sqrt{3}$.